イラストで学ぶ制御工学

第10章　自由システムと安定性

中京大学 工学部 機械システム工学科
木野　仁

Information

- このスライドは「イラストで学ぶ制御工学」を講義で活用するために提供されているスライドです．
- 「イラストで学ぶ制御工学」をご購入頂けていない方は，必ずご購入いただいてからご利用ください．

「イラストで学ぶ制御工学（講談社）」
木野仁（著）谷口忠大（監）峰岸桃(絵)

ホイールダックとは

- ホイールダックとは，「イラストで学ぶシリーズ（講談社）」において，主人公の博士と助手が開発していく，アヒル型ロボットである．

姉妹書

- イラストで人工知能概論

ホイールダック2号の開発を通じて人工知能を学ぶ

- イラストでロボット工学

ホイールダック2号アットホームの開発を通じてロボット工学を学ぶ

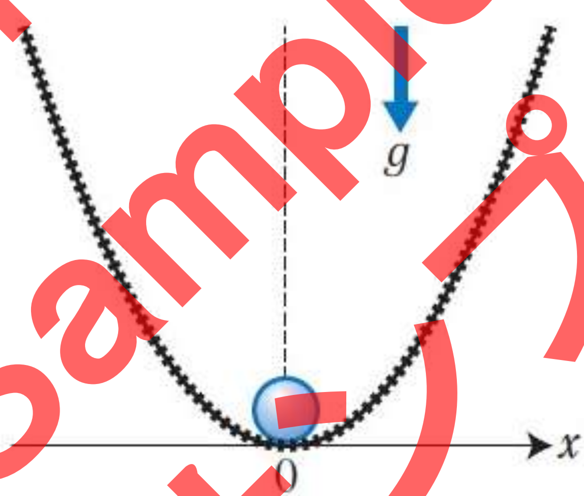
STORY

彼女は授業が終わった講義室で，スマートフォンを開いている．これまでたくさんのホイールダック1 号の動画が送られてきた．その様子からホイールダック1 号製作の悪戦苦闘が伝わる．「次の夏休みには日本に帰れるかな？　私もホイールダック1 号作りを手伝いたいな」再生した動画は過渡応答が改善され，安定して起き上がれるようになったホイールダック1 号くんだった．「でも，これが多変数の場合でもできないといけないのよね」彼女は溜息を漏らした．「何を見ているんだい？」「あ，教授！」そのとき，声をかけてきたのは中年美男で灰色の髪の教授だった．「先生，現代制御理論でも，ロボットの安定性を保証することってできるんですか？」そんな彼女に，教授はウィンクを返す．「もちろんだよ！　それこそが現代制御論の得意な安定性の解析なんだよ！」．

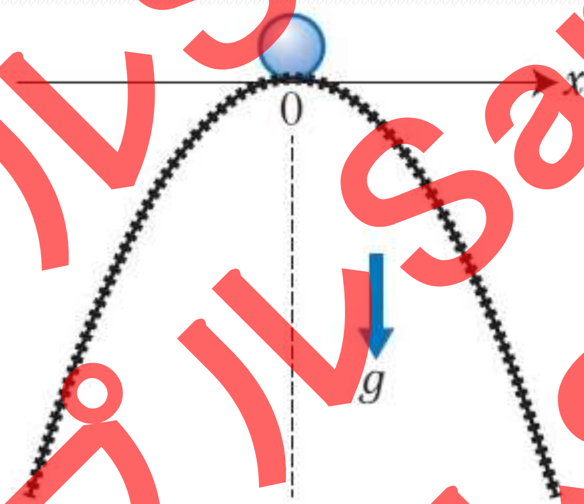
10.1 自由システムの解析

【安定性のイメージ】

- 安定性は極めて重要な概念．t=0でお椀の中央（x=0）でビー玉が静止しているとする（摩擦あり）．初期状態では外部から力を受けない限り，x=0で静止し続ける．これを平衡状態といい，x=0を平衡点という．



(a) 下に凸（摩擦あり）

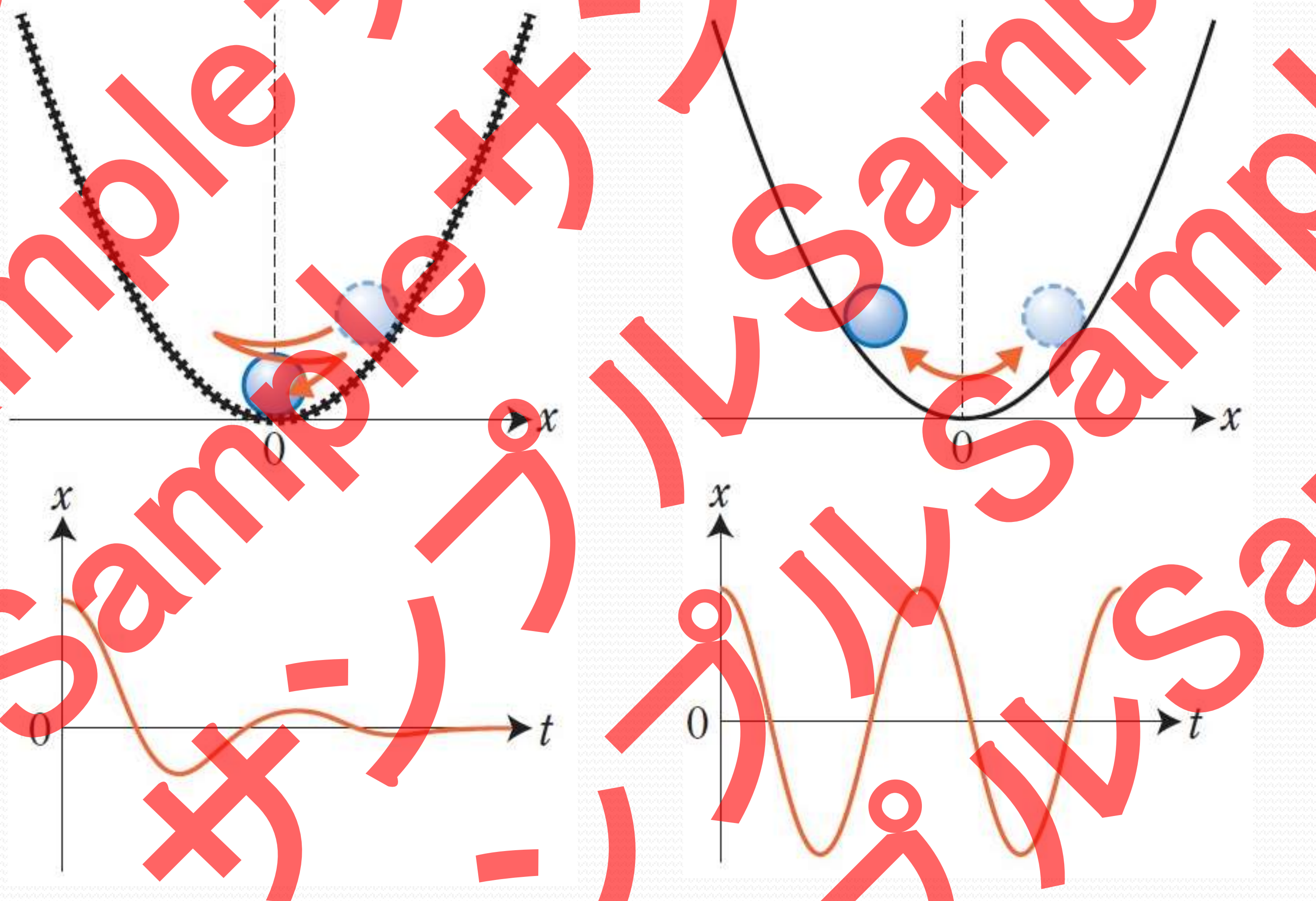


(b) 上に凸（摩擦あり）

(a) 安定（漸近安定）　(b) 不安定

- ビー玉が少し平衡点からズレると，右では，左右に振動しながら時間経過につれて平衡点$x(t)=0$に収束する．左は，平衡点からどんどん離れていってしまう．イメージで言えば，現代制御では右を安定，左を不安定という．

- 摩擦が存在しない場合を考える．ビー玉はx=0近傍で振動するが，振幅が増加しない．この場合も安定という．
- 平衡点に収束する状態のことを特に漸近安定という．



- 厳密な意味では状態方程式において状態ベクトル$x(t)=x_0$かつ$u(t)=u_0$で以下を満たすとき，x_0, u_0を平衡点といい，この状態とを平衡状態という．

$$\dot{x}(t) = Ax_0 + Bu_0 = 0$$

- $\dot{x} = 0$ より入力$u(t)=u_0$から変化しなければ，状態ベクトル$x(t)$はx_0にとどまり続ける．
- 制御設計で重要なことは，不安定な制御システムを構築しないこと．不安定システムは，$x(t)$が時間経過とともに発散し，制御不能となる（≒暴走）→大事故．
- 逆にいえば，制御の重要な視点は「システムを安定にすること」といえる．出来れば漸近安定とし，制御により状態ベクトルxを平衡点（の近傍）に収束させることが最も望ましい．

【自由システム】

- 入力$\boldsymbol{u}$=**0**の以下のシステムを考える．状態ベクトル$x(t)$および出力ベクトル$y(t)$は初期値から自然のなすがままにしかならない．これを自由システムという．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

- 入力$\boldsymbol{u}$=**0**でもビー玉の例のように，漸近安定には$x(t)$が平衡点に収束し，不安定な場合には発散する．
- 出力方程式より，$x(t)$が発散しなければ，出力$y(t)$も発散せず，$x(t)$がある値に収束すれば，$y(t)$も収束する．
- 自由システムの安定性は状態方程式の行列Aがカギを握っている（第9章の2種類のマス・バネ・ダンパシステムの行列Aの中身を思い出そう）．

- 自由システムの状態方程式の解$x(t)$を求めよう．事前準備として，以下のスカラ変数の微分方程式を考える．

$$\dot{x}(t) = ax(t) \quad x(0) = x_0\ (\neq 0)$$

- 上式は変数$x(t)$を時間微分すれば，元の変数 $x(t)$ と同じ形式となる．この特徴を持つ関数はeに関するものと推測できる．そこで，解を以下と仮定する（$k_1 \neq 0$）．

$$x(t) = k_1 e^{k_2 t}$$

- 微分した $\dot{x}(t) = k_1 k_2 e^{k_2 t}$ を元の微分方程式に代入する．

$$k_1 k_2 e^{k_2 t} = a k_1 e^{k_2 t} \rightarrow k_2 e^{k_2 t} = a e^{k_2 t}$$

- よって，$k_2=a$を得る．$x(t) = k_1 e^{at}$ より，$t=0$を代入すると$k_1=x(0)$を得る．以上より，以下の解を得る．

$$x(t) = x(0) e^{at}$$

- 先述の解法を以下の状態方程式に拡張する．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

- 解$\boldsymbol{x}(t)$を以下のように仮定する．$\boldsymbol{c}$は$n \times 1$定数ベクトル．

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}$$

- 行列指数関数 $e^{\boldsymbol{A}t}$ は$n \times n$行列．上式を時間微分して

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d}{dt}(e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c}) = (e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{A})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)$$

- 上式は元の状態方程式を満たすため，仮定した解は正しい．$t=0$を代入して$\boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{c}$が得られ，$\boldsymbol{x}(t)$は以下となる．

$$\boldsymbol{x}(t) = e^{\boldsymbol{A}t}\boldsymbol{x}(0)$$

- 行列 $e^{\boldsymbol{A}t}$ は自由システムの状態変数ベクトル$\boldsymbol{x}(t)$の挙動を決定する要素であり，状態推移行列（遷移行列）とも呼ぶ．

- 状態推移行列 $e^{\mathbf{A}t}$ の性質はスカラ関数 $x(t)=e^{at}$ をイメージする．スカラ関数の挙動は以下に大別される．
- $a>0$は不安定，$a \leqq 0$は安定，$a<0$は漸近安定に相当する．

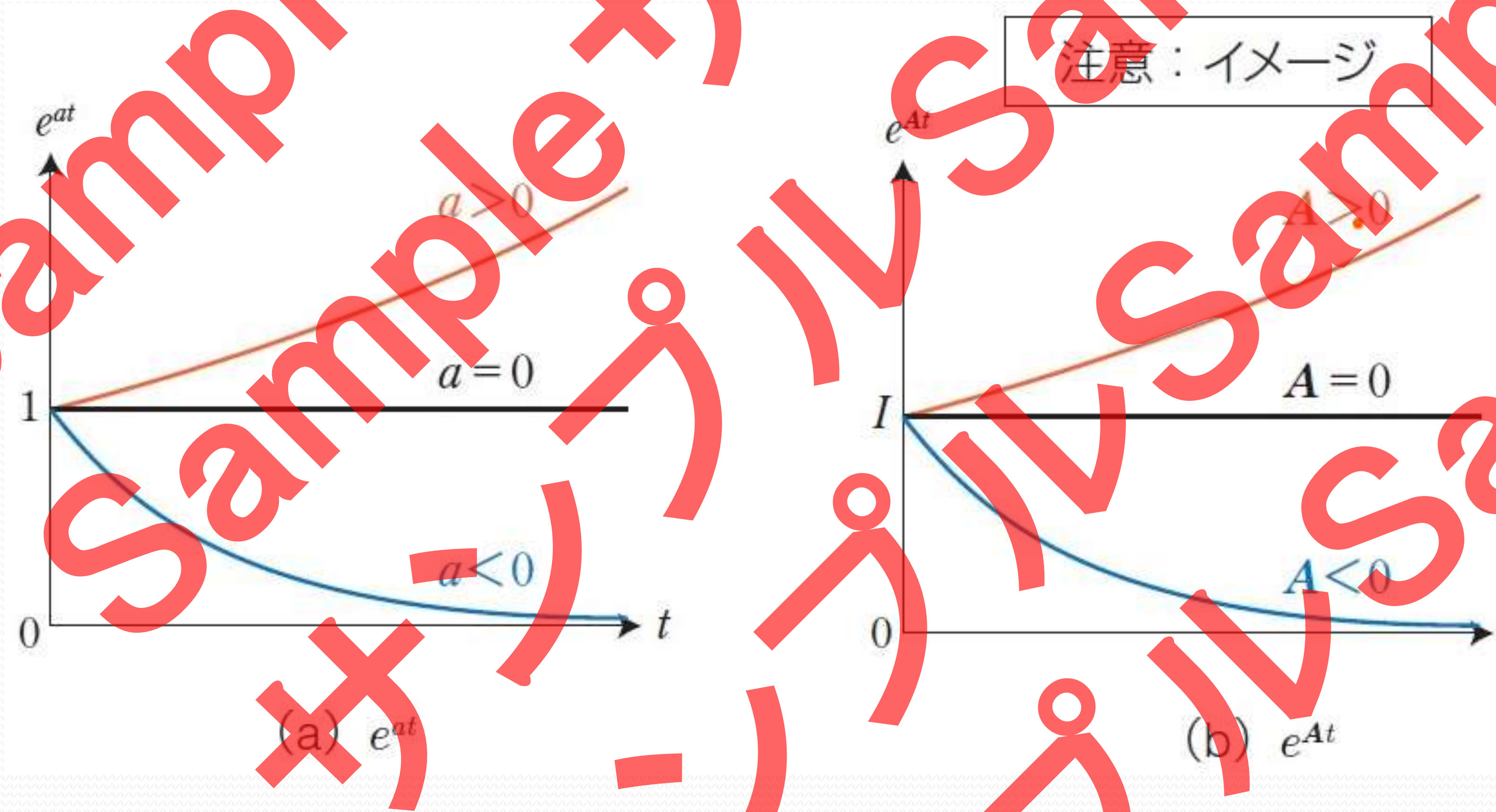
(1) $a=0$ の場合：$x(t)$ は一定値 $(e^0=1)$ となる．

(2) $a>0$ の場合：$t \to \infty$ で $e^{at} \to \infty$ となり発散する．

(3) $a<0$ の場合：$t \to \infty$ で $e^{at} \to 0$ となりゼロに収束する．$|a|$ の値が大きいほど早くゼロに収束する．

(a) e^{at}

- 状態推移行列に拡張し，（数学的厳密性を無視し）イメージとして示したものが右図である．行列$\boldsymbol{A}$が(3)に相当すれば，$e^{\boldsymbol{A}t} \to \boldsymbol{0}\ (t \to \infty)$となり，$\boldsymbol{x}(t) \to \boldsymbol{0}$となり，漸近安定になりそうなイメージである．



10.2 自由システムの漸近安定性

- 自由システムの行列Aと$x(t)$の収束性を少し厳密に数学的な説明をする．自由システムの状態方程式を漸近安定にし，$x(t)\to 0(t\to\infty)$ にする必要十分条件は以下で示される．

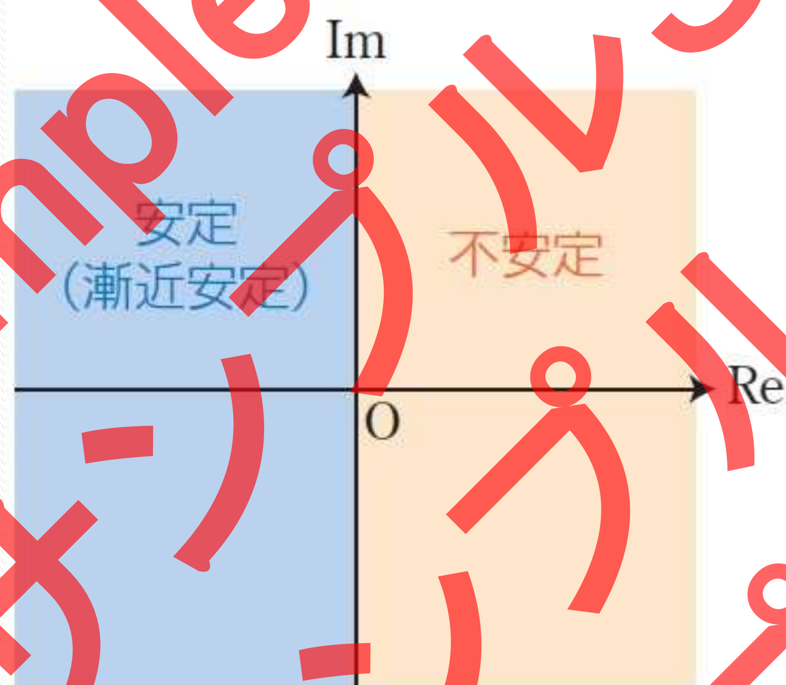
自由システムの漸近安定

状態方程式が以下で示される自由システムを考える．

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \tag{10.7}$$

自由システムの任意の初期ベクトル $\boldsymbol{x}(0)$ に対し，$t \to \infty$ で $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{0}$ のとき，漸近安定であるという．この必要十分条件は行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値 $\lambda_i\ (i = 1, \ldots, n)$ の実部が負（Re$[\lambda_i] < 0,\ i = 1, \ldots, n$）となることである．自由システムの安定性は行列 $\boldsymbol{A}$ にのみ依存し，漸近安定のとき行列 $\boldsymbol{A}$ を安定行列という．また，上記の自由システムの行列 $\boldsymbol{A}$ の固有値のことを，自由システムの極という．

- 行列の固有値は，特性方程式から得られ，実数もしくは複素数となり，固有値は複素平面上で表現できる．
- 固有値の実部Re[λi]は，スカラ関数 $x(t) = e^{at}$ のaに相当．
- 全ての固有値が複素平面上で左半平面にあれば実部が負で漸近安定となる．1つでも右半平面（or虚軸上）に存在すれば，実部が正（orゼロ）となり漸近安定とはならない．



10.3 ラウス・フルビッツの安定判別

- 自由システムが漸近安定かどうかは，行列Aの固有値の実部の正負で判断できる．
- 行列の固有値の計算は，一般に行列のサイズが大きくなると計算するのは大変になる．
- 漸近安定性だけを知りたい場合，行列Aの固有値の値ではなく，行列Aが安定行列か否かを判別できればよい．
- この判別方法として，次に説明するラウス・フルビッツの安定判別法がある．

【ラウス・フルビッツの安定判別法】

- 行列A(n×n)の固有値は以下の特性方程式の解（根）$s=\lambda i$

$$|sI - A| = \alpha_0 s^n + \alpha_1 s^{n-1} + a_{n-1} s^{n-2} + \ldots + \alpha_{n-1} s + \alpha_n = 0$$

- すべての根（＝固有値）$si=\lambda i$の実部が負になるとき（Re[si]<0　(i=1〜n)），以下の2つの条件を満足する.

行列 A のすべての固有値の実部が負になる条件

【条件 1】　式 (10.8) のすべての係数が正となる ($\alpha_i > 0$)　($i = 1, \ldots, n$).

【条件 2】　係数 α_i　($i = 1, \ldots, n$）を用いて，表 10.1 のラウス表を作ったとき，表の左端に並ぶ係数（青色で色づけされている α_0, α_1, β_1, γ_1, $\cdots$）がすべて正（> 0）となる.

【ラウス表の作り方（表 10.1）】

【ステップ 1】 表 10.1 において，第 1 行と第 2 行に特性方程式 (10.8) の係数（$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$）の値を交互に並べる．

表 10.1 ラウス表

第 1 行	α_0	α_2	α_4	α_6	$\cdots$
第 2 行	α_1	α_3	α_5	α_7	$\cdots$
第 3 行	β_1	β_2	β_3	$\cdots$	
第 4 行	γ_1	γ_2	$\cdots$		
$\vdots$	$\vdots$				

【ステップ 2】　第 3 行の成分 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots)$ を以下のルールに沿って計算していく．係数が存在しない場所はゼロ $(=0)$ とおいて計算する．

$$\beta_k = -\frac{1}{\alpha_1}\begin{vmatrix}\alpha_0 & \alpha_{2k} \\ \alpha_1 & \alpha_{2k+1}\end{vmatrix} = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_0\alpha_{2k+1} - \alpha_1\alpha_{2k}) \quad (k = 1, \ldots)$$

例えば，β_3 の場合には，以下のように計算する（表 10.2 の□で囲まれた箇所を参照）．

$$\beta_3 = -\frac{1}{\alpha_1}\begin{vmatrix}\alpha_0 & \alpha_6 \\ \alpha_1 & \alpha_7\end{vmatrix} = -\frac{1}{\alpha_1}(\alpha_0\alpha_7 - \alpha_1\alpha_6)$$

表 10.2　ラウス表のステップ 2 の計算例

第 1 行	$\boxed{\alpha_0}$	α_2	α_4	$\boxed{\alpha_6}$	$\cdots$
第 2 行	$\boxed{\alpha_1}$	α_3	α_5	$\boxed{\alpha_7}$	$\cdots$
第 3 行	β_1	β_2	$\boxed{\beta_3}$	$\cdots$	

【ステップ 3】 第 4 行の成分 $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots)$ を次式のようにステップ 2 と同様のルールに沿って計算していく（例えば，γ_2 の計算では表 10.3 の□の箇所を参照）.

$$\gamma_k = -\frac{1}{\beta_1}\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_{2k+1} \\ \beta_1 & \beta_{k+1} \end{vmatrix} = -\frac{1}{\beta_1}(\alpha_1\beta_{k+1} - \beta_1\alpha_{2k+1}) \quad (k = 1, \dots$$

表 10.3 ラウス表のステップ 3 の計算例

第 1 行	α_0	α_2	α_4	α_6	$\cdots$
第 2 行	$\boxed{\alpha_1}$	α_3	$\boxed{\alpha_5}$	α_7	$\cdots$
第 3 行	$\boxed{\beta_1}$	β_2	$\boxed{\beta_3}$	$\cdots$	
第 4 行	γ_1	$\boxed{\gamma_2}$	$\cdots$		

【ステップ 4】 以下，同様の手順で p 番目の行に対し，その上の2つの行（$p-2$，$p-1$）の成分を用いて表の値を計算していく．表10.4のように，$p-2$ 行の成分を x_i $(i=1,\ldots)$，$p-1$ 行の成分を y_i $(i=1,\ldots)$，p 行の成分を z_i $(i=1,\ldots)$ としたとき，以下のように z_k を計算していく（表10.4の□の箇所を参照）．これを行の成分が1つになるまで繰り返し行っていく．分母がゼロで計算不能の場合は，そこで繰り返し計算をストップする．

$$z_i = -\frac{1}{y_1}\begin{vmatrix} x_1 & x_{i+1} \\ y_1 & y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{y_1}(x_1 y_{i+1} - x_{i+1} y_1) \quad (i = 1, \ldots)$$

表 10.4 ラウス表のステップ 4 の計算例

第 $p-2$ 行	$\boxed{x_1}$	x_2	$\cdots$	x_i	$\boxed{x_{i+1}}$	$\cdots$
第 $p-1$ 行	$\boxed{y_1}$	y_2	$\cdots$	y_i	$\boxed{y_{i+1}}$	$\cdots$
第 p 行	z_1	z_2	$\cdots$	$\boxed{z_i}$	z_{i+1}	$\cdots$
$\vdots$						

- ラウス・フルビッツの安定判別法では，行列Aの特性方程式に対し，最初に条件1 を調べる．これを満足しない場合には，行列Aは安定行列とはならない．
- 条件1を満足する場合には，ラウス表を作り条件2を調べる．条件2を満足すれば，行列A は安定行列となり，自由システムは漸近安定となる．
- 行列Aの固有値を直接に求めなくとも漸近安定かどうかを知ることができる．

10.4 安定判別の例

システムA：通常のバネ
システムB：バネ力が，自然長とは反対向きに発生する

- 第9章のマス・バネ・ダンパの自由システムを考える．行列$\boldsymbol{A}$ は$\boldsymbol{A}_A$と$\boldsymbol{A}_B$の2種（k>0，m>0，μ>0）．

$$\boldsymbol{A_A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m}\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\alpha & -\beta\end{bmatrix}$$

- 行列$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_A$の場合，$\alpha=k/m$，$\beta=\mu/m$とおけば，

$$|s\boldsymbol{I_2}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}s & -1\\ \alpha & s+\beta\end{vmatrix}=s^2+\beta s+\alpha=0$$

第1行	1	α
第2行	β	0
第3行	b_1	-

- 各係数は全て正で条件1を満たす．次にラウス表を作る．β>0より，条件2を満たす．このシステムは漸近安定となり行列$\boldsymbol{A}_A$の固有値の実部はすべて負となる

$$b_1=-\frac{1}{\beta}\begin{vmatrix}1 & \alpha\\ \beta & 0\end{vmatrix}=-\frac{1}{\beta}(0-\alpha\beta)=\alpha>0$$

- 次に$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_B$の場合，$\alpha=k/m$，$\beta=\mu/m$とおけば特性方程式の第3項が負となり，条件1を満たさない．

$$\boldsymbol{A}_B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix}$$

$$|s\boldsymbol{I}_2-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix} s & -1 \\ -\alpha & s+\beta \end{vmatrix}=s^2+\beta s-\alpha=0$$

- 行列$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_B$は安定行列とはならず，システムは漸近安定とならない．

棒の質量をm，回転軸まわりの慣性モーメントをJ，回転軸から重心までの距離をl_g,

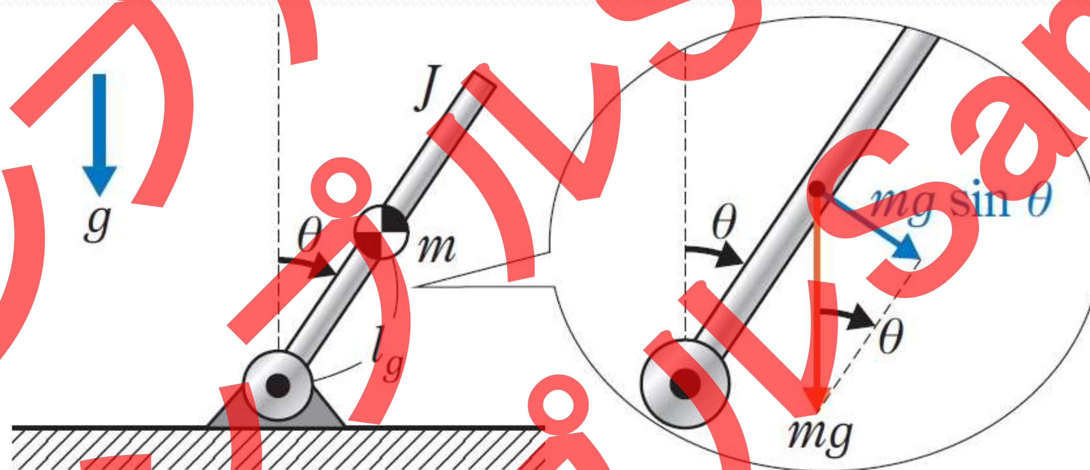
【1自由度の倒立振子（自由システム）】

- 下図の自由システムを考える．運動方程式は

$$J\ddot{\theta}(t) = mgl_g \sin\theta(t)$$

- $\theta(t)=0$近傍で$\sin\theta(t) \fallingdotseq \theta(t)$近似し，次式を得る．

$$\ddot{\theta}(t) = \frac{mgl_g}{J}\theta(t)$$



- $\boldsymbol{x} = (\theta,\ \dot{\theta})^T$ とおけば状態方程式は

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) \quad ただし\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \gamma & 0 \end{bmatrix} \quad \gamma = \frac{mgl_g}{J}$$

- この場合の特性方程式は以下となり，係数に負が含まれており，ラウス・フルビッツの安定判別の条件1 を満足しないため，漸近安定とならない．

$$s^2 - \gamma = 0$$

- 念のため固有値を計算すると $\lambda_i = \pm\sqrt{\gamma}$ となり，1つの固有値の実部が正で，行列*A*が安定行列にならない．
- 図からイメージができるように，*t*=0のとき***x***(0)≠**0**の初期値を与えられた場合には棒が倒れてしまい，***x***(*t*)=**0**に収束しない．

ホイールダック１号開発の進捗

彼女は，自由システムの安定性について理解し，この安定性には行列の固有値が関連していることを理解した．この概念を拡張していくことで，ホイールダック１号を安定に制御できるのだ！

まとめ

- 状態変数ベクトル $\boldsymbol{x}(t)$ が $t \to \infty$ で平衡点に収束することを漸近安定という．
- 式 (10.7) の自由システムが漸近安定となるには，行列 $\boldsymbol{A}$ のすべての固有値の実部が負になることである．
- ラウス・フルビッツの安定判別法を用いれば，行列の固有値を求めなくても，漸近安定かどうかを判別できる．