

イラストで学ぶ制御工学

第4章 主な機械要素の伝達関数



中京大学 工学部 機械システム工学科
木野 仁



- 本ファイルで提供されるコンテンツの著作権は、木野仁、谷口忠大、峰岸桃、(株)講談社にある。
- 本ファイルは、著者らに利用承諾書を提出し、許可されたものだけに限り使用してよい。ファイルを修正しても構わないが、印刷、ネット上で公開、2次配布は禁止する。また、無断で販売することを禁止する。

Information



- このスライドは「イラストで学ぶ制御工学」を講義で活用するために提供されているスライドです。

- 「イラストで学ぶ制御工学」をご購入頂けていない方は、必ずご購入いただいてからご利用ください。

「イラストで学ぶ制御工学（講談社）」

木野仁（著） 谷口忠大（監） 峰岸桃（絵）



ホイールダックとは

- ホイールダックとは、「イラストで学ぶシリーズ（講談社）」において、主人公の博士と助手が開発していく、アヒル型ロボットである。



1号



2号



@ホーム

姉妹書



- イラストで人工知能概論
ホイールダック2号の開発を
通じて人工知能を学ぶ

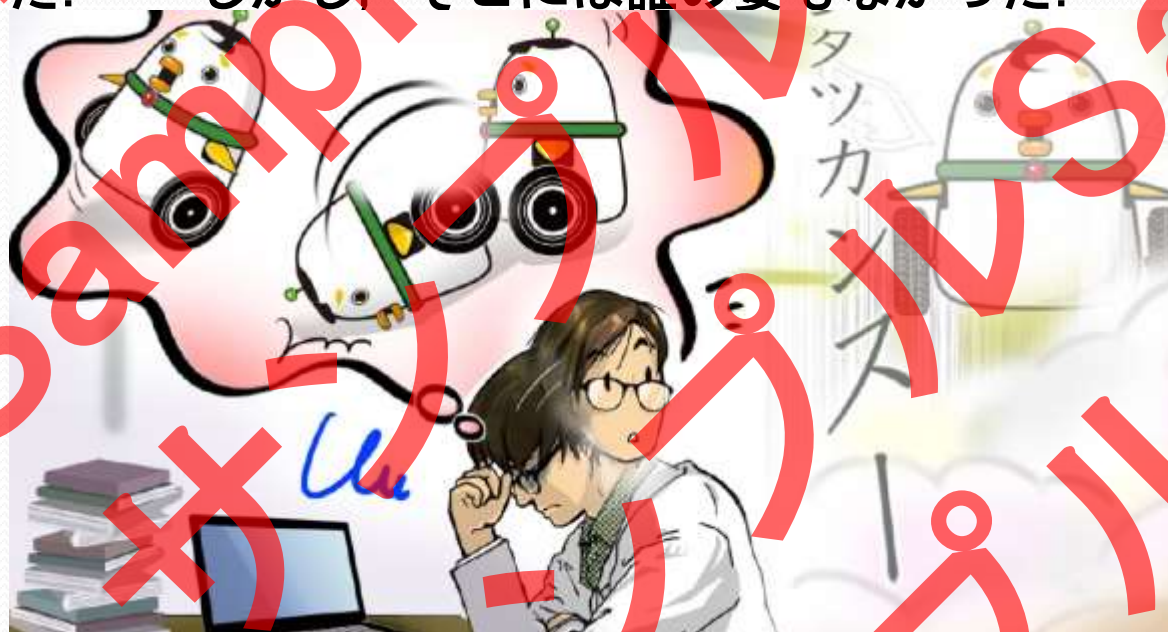


- イラストでロボット工学
ホイールダック2号アット
ホームの開発を通じてロボッ
ト工学を学ぶ

STORY

ただの運動方程式から始まったはずなのに、博士の目の前には、高校時代に物理の授業で習った力学の世界とは随分と違う世界が広がっていた。微分方程式を超えて、ラプラス変換は、確かに新しい扉を開いていた。

しかし、少しばかりの不安が博士にはあった。確かにホイールダック1号の動きは、初等的な力学で習った「物体の運動」と同じように、微分方程式で表されるかもしれない。だけど、ホイールダック1号は安定して立ってくれるのだろうか？ すっ転んだりしないのだろうか？ 振動したりしないのだろうか？ 微分方程式をただ見つめるだけでは、僕たちはそれを知ることはできない。そのとき、耳元で声がした『博士、そんなときこそ、伝達関数だよ！』博士は驚いて振り返った。——しかし、そこには誰の姿もなかった。



4.1 伝達関数の定義

- ダンパの抵抗力を出力 $y(t)$ ，ピストンの変位を入力 $x(t)$

$$y(t) = -\mu \frac{dx(t)}{dt}$$

- 上式をラプラス変換して， s 領域の式に変換すると

$$Y(s) = -\mu s X(s)$$

- $X(s)$ と $Y(s)$ は s 領域での入力と出力と考えることができる。
新しく関数 $G(s)$ を用いて $G(s) = -\mu s$ とおくと

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

- $G(s)$ はダンパの特性を示し，以下のように解釈できる。

$$\boxed{\text{出力}} = \boxed{\text{対象システムの特性を示す関数}} \times \boxed{\text{入力}}$$

- s 領域での出力は「対象システムの特性を示す関数」に入力をかけたもので計算できる。

- s領域のシステムに対して，入力 $X(s)$ ，出力 $Y(s)$ とすると
$$Y(s) = G(s)X(s)$$

- 対象システムの特性を示す関数 $G(s)$ は以下となる.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\boxed{\text{出力}}}{\boxed{\text{入力}}}$$

このs領域の入出力関係を示す $G(s)$ を伝達関数という.

- ただし，この関係はt領域の式では成立しない.
- 同じシステムでも入力と出力のとり方を変更すると，伝達関数が異なる.
 - 「何が入力で，何が出力と考えるか？」が重要.
- 伝達関数を知ること，そのシステムの特性を知ること.

4.2 基本要素の伝達関数

- 基本的な要素の伝達関数を理解しておくで便利
→伝達関数を組み合わせて、複雑な伝達関数を構築

【比例要素】（入出力が比例の関係にある要素）

・機械システムのバネ

入力 $x(t)$ をバネの伸び $l(t)$ ，出力 $y(t)$ を力 $f(t)$ とする。

t 領域の式

$$y(t) = kx(t)$$

s 領域の式

$$Y(s) = kX(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k$$



$$f(t) = kl(t)$$

【比例要素】（入出力が比例の関係にある要素）

・ 電気システムの電気抵抗

入力 $x(t)$ を電流 $i(t)$ ，出力 $y(t)$ を電圧 $v(t)$ とする。

t 領域の式

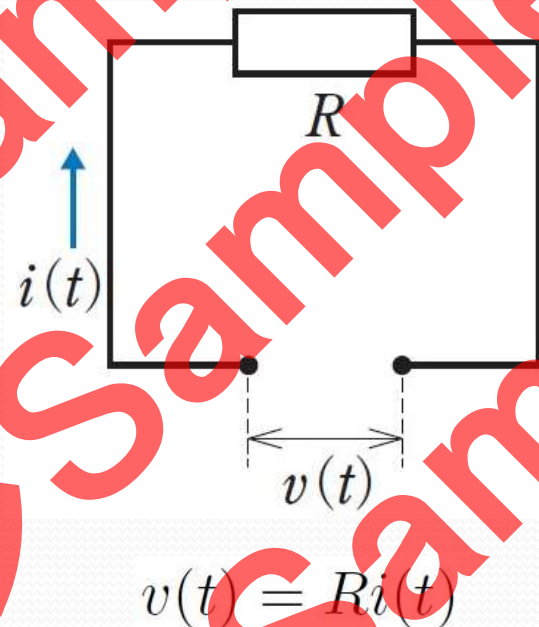
$$y(t) = Rx(t)$$

s 領域の式

$$Y(s) = RX(s)$$

伝達関数

$$G(s) = R$$



【微分要素】（入出力が微分の関係にある要素）

・ 機械システムのダンパ（1階微分要素）

入力 $x(t)$ を距離 $l(t)$ とし，出力 $y(t)$ を外部から与えた力 $f(t)$ とする．

t 領域の式

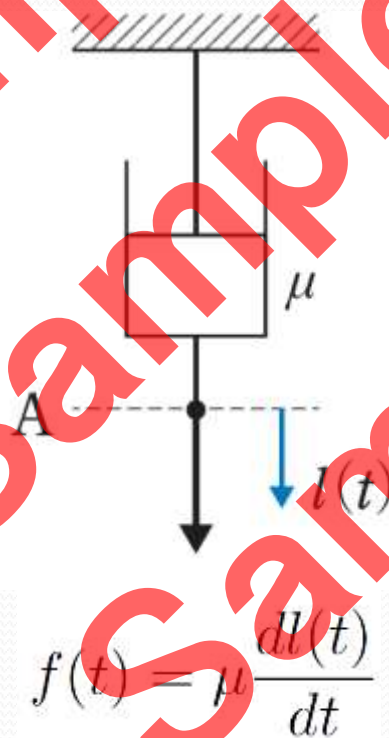
$$y(t) = \mu \frac{dx(t)}{dt}$$

s 領域の式

$$Y(s) = \mu s X(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \mu s$$



【微分要素】（入出力が微分の関係にある要素）

・ 電気システムのコイル（電流と電圧）（1階微分要素）

入力 $x(t)$ を距離 $l(t)$ とし，出力 $y(t)$ を外部から与えた力 $f(t)$ とする。

t 領域の式

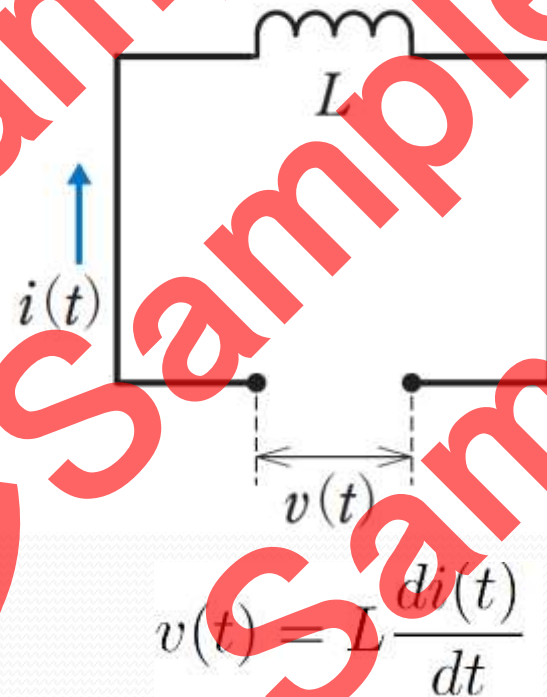
$$y(t) = L \frac{dx(t)}{dt}$$

s 領域の式

$$Y(s) = LsX(s)$$

伝達関数

$$G(s) = Ls$$



【微分要素】

・ 機械システムの質量（マス）要素（2階微分要素）

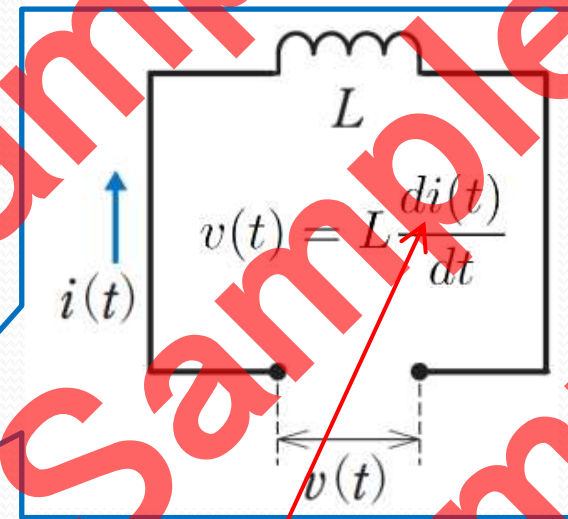
質量 m の物体に外部から力を与え、そのときの変位を考える。

入力 $x(t)$ を変位，出力 $y(t)$ を力ととれば

t 領域の式 $y(t) = m \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$

s 領域の式 $Y(s) = ms^2 X(s)$

伝達関数 $G(s) = ms^2$



・ 電気システムのコイル（電荷と電圧）（2階微分要素）

入力 $x(t)$ を電荷 $q(t)$ ，出力 $y(t)$ を電圧 $v(t)$ とすれば

伝達関数 $G(s) = Ls^2$

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$
$$v(t) = L \frac{d^2 q(t)}{dt^2}$$

【積分要素】（入出力が積分の関係にある要素）

・機械システムの油圧シリンダ

ピストンに流入する油の流量を $q(t)$ ，移動距離を $l(t)$ ，油を受ける面積を A ，油の体積を $v(t)$ とする．（ $t=0$ で $v(0)=0$ ）

$$v(t) = \int_0^t q(\tau) d\tau \quad v(t) = Al(t) \quad l(t) = \frac{1}{A} \int_0^t q(\tau) d\tau$$

入力 $x(t)$ を流量 $q(t)$ ，出力 $y(t)$ を距離 $l(t)$ ， $K=1/A$ とおく．

t 領域の式

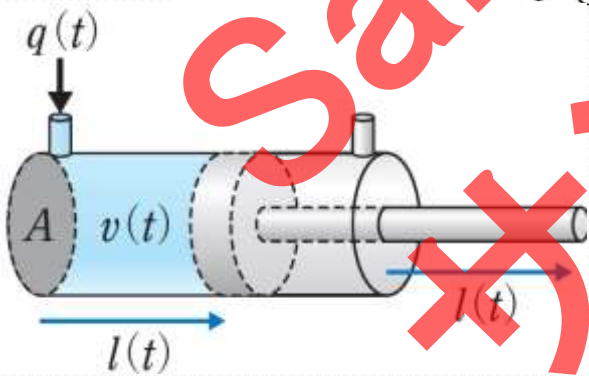
$$y(t) = K \int_0^t x(\tau) d\tau$$

s 領域の式

$$Y(s) = \frac{K}{s} X(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s}$$



【積分要素】

・電気システムのコンデンサ

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$$

コンデンサにかかる電圧 $v(t)$ ，蓄えられる電荷 $q(t)$ とする。

$$q(t) = Cv(t) \quad q(t) = \int_0^t i(\tau) d\tau \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

入力 $x(t)$ を電流 $i(t)$ ，出力 $y(t)$ を電圧 $v(t)$ ， $K=1/C$ とする

t領域の式

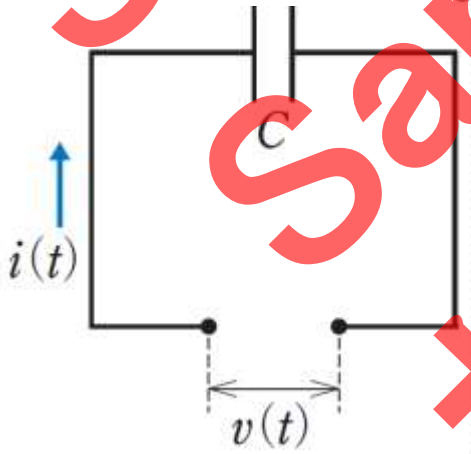
$$y(t) = K \int_0^t x(\tau) d\tau$$

s領域の式

$$Y(s) = \frac{K}{s} X(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{K}{s}$$



【1次遅れシステム】（入出力が1階微分方程式）

・一般的な表現

入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ が以下で表現されるものを1次遅れシステム（1次遅れ要素）という（注意： $y(t)=$ と表記されない）。

t 領域の式

$$T = \frac{a}{b}, \quad K = \frac{1}{b} \quad (b \neq 0)$$

$$a \frac{dy(t)}{dt} + by(t) = x(t)$$



$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = Kx(t)$$

s 領域の式

$$(Ts + 1)Y(s) = KX(s)$$

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} X(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{K}{Ts + 1}$$

【1次遅れシステム】

・機械システムのバネ・ダンパ

$l(t)$ を入力, $q(t)$ を出力. ($l(0)=q(0)=0$ で自然長)

バネの伸び $l(t)-q(t)$ で, 点Bでの力は $k(l(t)-q(t))$ となる. これ
がダンパの抵抗力と相殺.

$$T = \frac{\mu}{k}$$

t 領域の式

$$k(l(t) - q(t)) = \mu \frac{dq(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

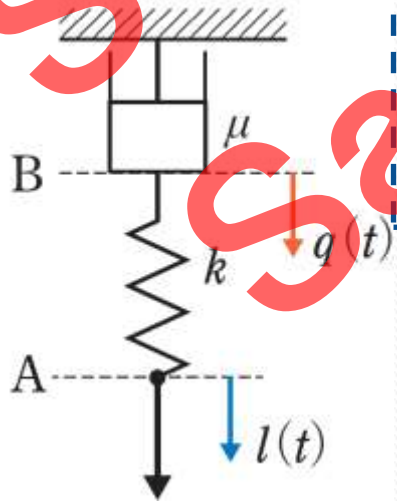
$$(Ts + 1)Y(s) = KX(s) \quad K=1 \text{ の場合に相当}$$

s 領域の式

$$Y(s) = \frac{K}{Ts + 1} X(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$



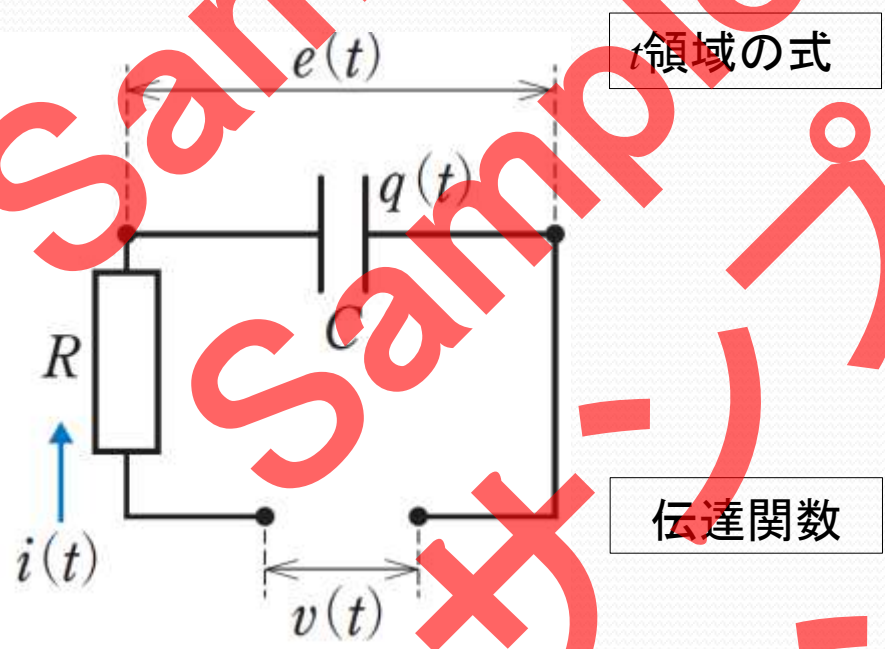
$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau$$

【1次遅れシステム】

・電気システムのRC回路

電源電圧を $v(t)$, コンデンサにかかる電圧 $e(t)$, 回路に流れる電流を $i(t)$ とする. 入力を電圧 $v(t)$, 出力を電圧 $e(t)$.

$$v(t) = Ri(t) + e(t) \quad i(t) = C \frac{de(t)}{dt}$$



$$v(t) = RC \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

$$T = RC$$

$$G(s) = \frac{1}{Ts + 1}$$

【2次遅れシステム】（入出力が2階微分方程式）

・一般的な表現

入力 $x(t)$ と出力 $y(t)$ が以下で表現されるものを2次遅れシステム（2次遅れ要素）という（注意： $y(t)=$ と表記されない）。

t 領域の式

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = x(t)$$

s 領域の式

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = X(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} X(s)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

$$K = \frac{1}{c}, \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{ac}}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{a}}$$

$$G(s) = \frac{K\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2}$$

【2次遅れシステム】

・機械システムのマス・バネ・ダンパ

$l(t)$ を入力, $q(t)$ を出力. ($l(0)=q(0)=0$ で自然長)

バネの伸び $l(t)-q(t)$ で, 点Bでの力は $k(l(t)-q(t))$ となる. これ
がダンパ抵抗力和加速の力で相殺.

t 領域の式

$$k(l(t) - q(t)) = m \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \mu \frac{dq(t)}{dt}$$

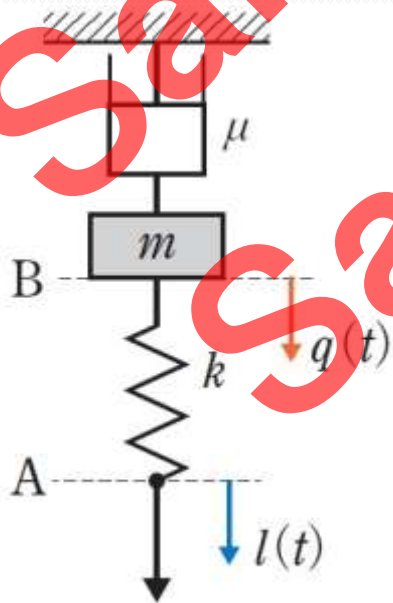
$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = x(t)$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c}$$

$$a = \frac{m}{k}, \quad b = \frac{\mu}{k}$$

$$c = 1$$



【2次遅れシステム】

・電気システムのLCR回路

電源電圧を $v(t)$ ，コンデンサ電圧を $e(t)$ ，コイル電圧を $v_L(t)$ ．
入力 $x(t)$ を電圧 $v(t)$ ，出力 $y(t)$ を電圧 $e(t)$ とする
電圧 $v(t)$ はコイル/コンデンサ/電気抵抗の電圧の和である．

t領域の式

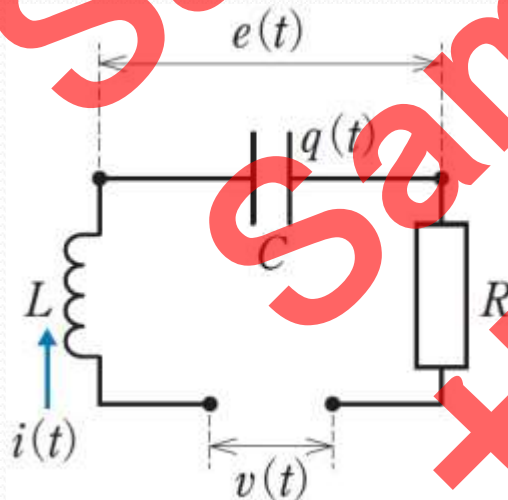
$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = LC \frac{d^2 e(t)}{dt^2} \quad i(t) = C \frac{de(t)}{dt}$$

$$v(t) = LC \frac{d^2 e(t)}{dt^2} + RC \frac{de(t)}{dt} + e(t)$$

$$a = LC, \quad b = RC, \quad c = 1$$

伝達関数

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$





ホイールダック 1号開発の進捗

これまでの解説のように、 s 領域では入出力の関係が伝達関数で表現できる。また、入出力の関係が同じ微分方程式で表記されるシステムは同様の形の伝達関数となる。これを利用し、博士はホイールダック 1号の開発を効率的に進めることができるようになった。

まとめ

- 伝達関数とは、 s 領域において出力を入力で割ったものである。
- t 領域において同じ形式の線形微分方程式では、 s 領域でも同じ形式のものとなる。
- s 領域の伝達関数の形式が分かれば、元の t 領域の微分方程式の形式が分かる。