イラストで学ぶ制御工学

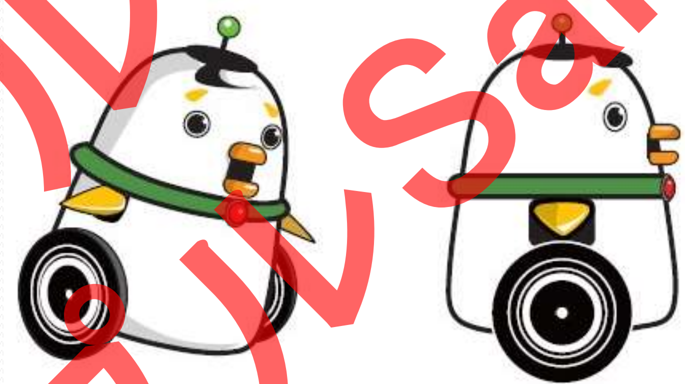
第7章　周波数応答

中京大学 工学部 機械システム工学科
木野　仁

Information

- このスライドは「イラストで学ぶ制御工学」を講義で活用するために提供されているスライドです．
- 「イラストで学ぶ制御工学」をご購入頂けていない方は，必ずご購入いただいてからご利用ください．

「イラストで学ぶ制御工学（講談社）」
木野仁（著）谷口忠大（監）峰岸桃(絵)



ホイールダックとは

- ホイールダックとは，「イラストで学ぶシリーズ（講談社）」において，主人公の博士と助手が開発していく，アヒル型ロボットである．

1号　2号　@ホーム

姉妹書

- イラストで人工知能概論

ホイールダック2号の開発を通じて人工知能を学ぶ

- イラストでロボット工学

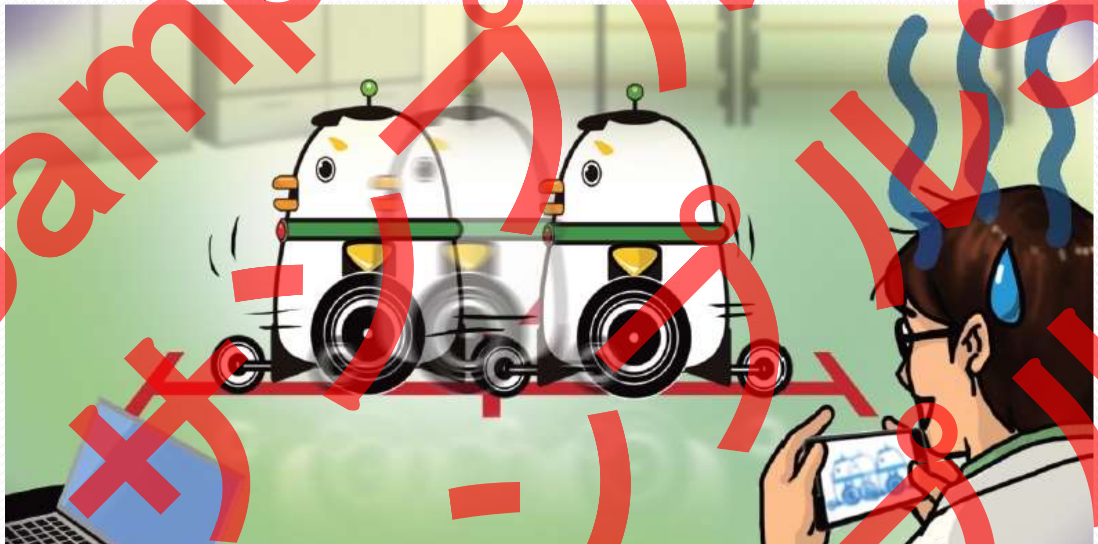
ホイールダック2号アットホームの開発を通じてロボット工学を学ぶ

STORY

ついに博士はホイールダック1 号を起き上がらせることに成功した．それは垂直に凛々しく立った．さらに前後に補助輪をつければ，起き上がりの代わりに前後への移動も制御することもできるようになった．

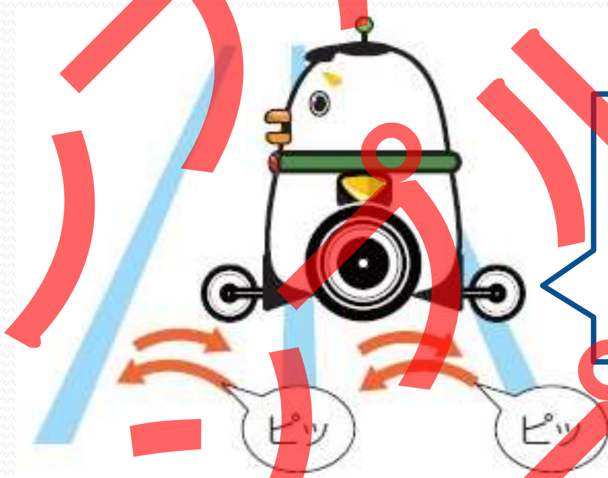
「そうだ！　ホイールダック1 号がいい感じに動いているところを動画に撮って，あいつに見せてやるか」

博士はアメリカに留学中の幼馴染みで年下の彼女のことを思い出した．そこで博士は補助輪をつけたホイールダック1 号を小気味よく前後に動かそうとした．しかし，動き出したホイールダック1 号は狙ったような決まったリズムでは動かず，うにょうにょと前後に動いた．どこか中途半端に……．ロボットがどのくらい狙った動きに追従できるか？　制御器とロボットが持つそんな性質を表すもの．それが周波数応答だった！



7.1 周波数応答のイメージ

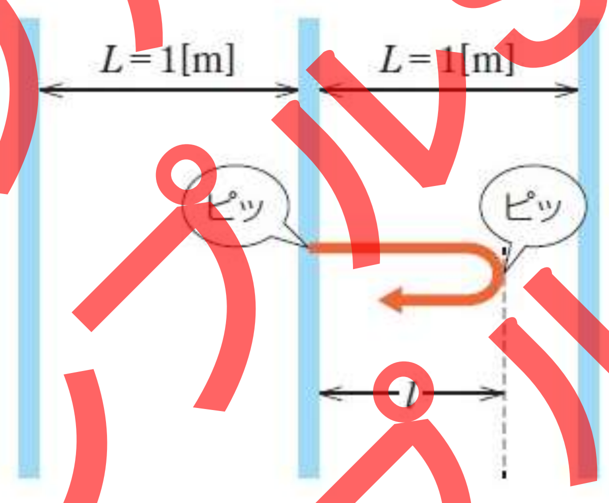
- **周波数応答**とは，**周期的な入力をシステムに与えたときの応答**のこと．周波数応答は「反復横跳び」に似ている．
- 反復横跳びは1メートル隔で3本線があり，運動者は開始合図後に中央→右→中央→左…と順番に線をまたぎ，またいだ線数で敏捷性を評価する．
- 周波数応答でも**敏捷性のようなもの**を評価できる．周波数応答のイメージを反復横跳びのルールを少し改変した「反復横跳び・改」で説明する．



補助輪付ホイールダック1号が再登場．補助輪のおかげで胴体が転倒することなく，前後に移動可能

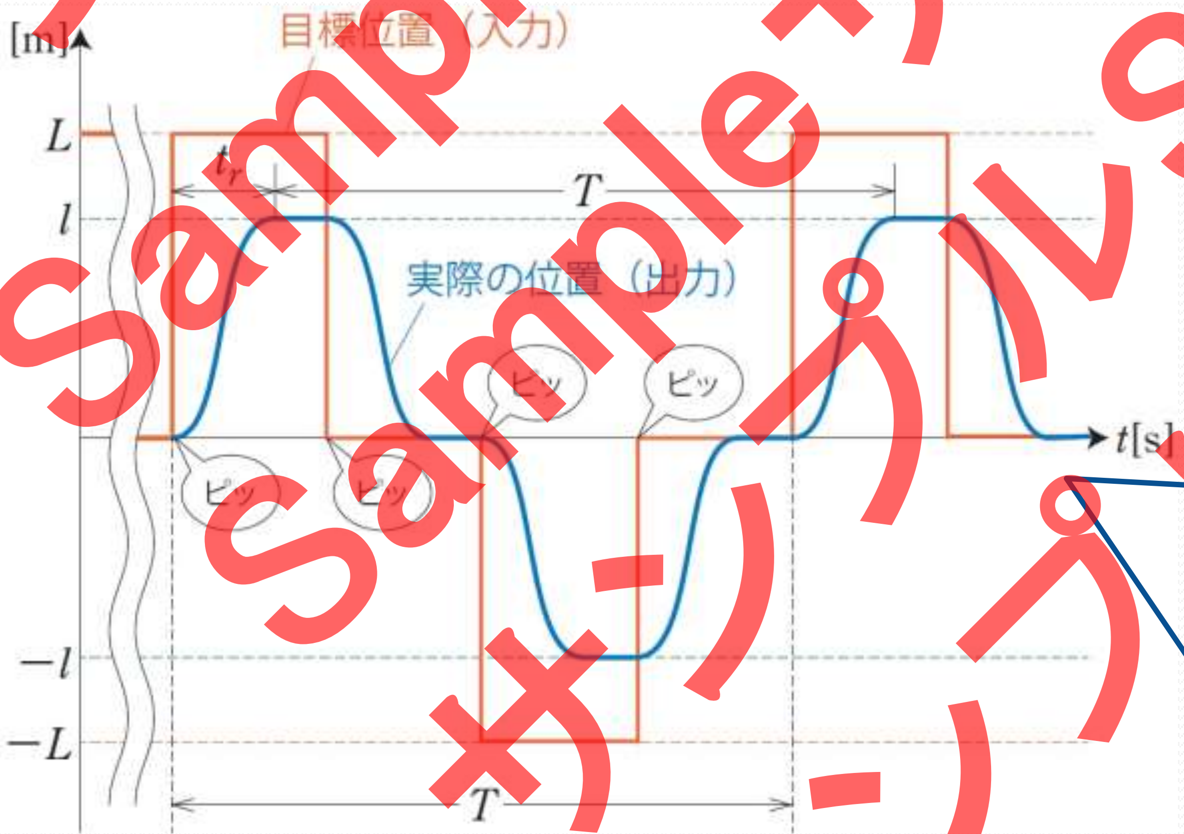
【周波数応答を理解するための「反復横跳び・改」】

- 3本の線の間隔をL=1[m]．一定間隔で音が鳴り，線を順番にまたぐ→この繰返し（音4回で中央に戻る：周期T[s]）．
- 複数の周期($T_1, \cdots, T_n$)を用意．Tが小さいと音間隔が短く，速い運動を要求．運動中にTは変化せず，Tを変更する場合は運動をリセットし，再度，初期状態から開始する．
- 移動途中で音が鳴ったら，次の線をまたいでなくても，次動作に移行（慣性のため，すぐ反転できない場合あり）．Uターンする瞬間の中央線からの距離をl[m]とする．



【周波数応答を理解するための「反復横跳び・改」続き】

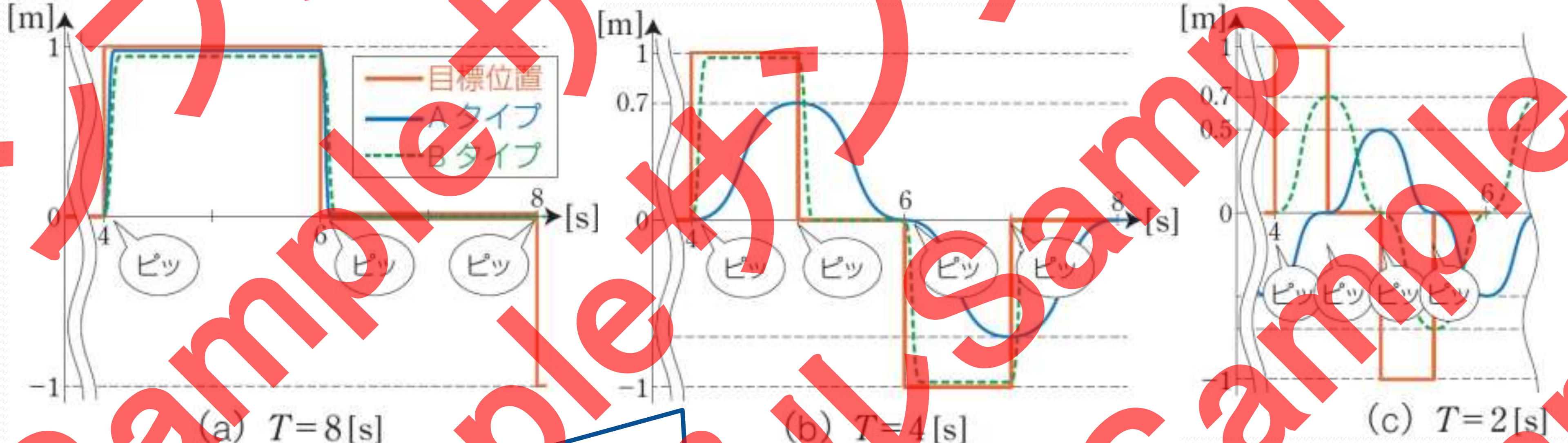
- 周期Tが小さい時はテンポが速く，実際に中央をまたぐのが要求よりズレる．この時間差をt_r[s]（負→遅れ）
- 周期Tを変化させてlとt_rを計測し，周期変化に対する目標位置への追従性を評価する（時間差はt_r/Tを計算し，「何周期分遅れたか（進んだか）」で評価）



・目標位置を入力，実際の移動距離を出力とする．目標は音のタイミングで瞬時に変化するので階段状．
・移動距離lが$L(=1)$に近いほど，t_rが0に近いほど，本来の動作に追従している
・$l>1$ なら左右線を追い越し，$l<1$ならば左右線までたどり着いていない．
・t_rの正負で運動が遅れているか，進んでいるかが分かる．

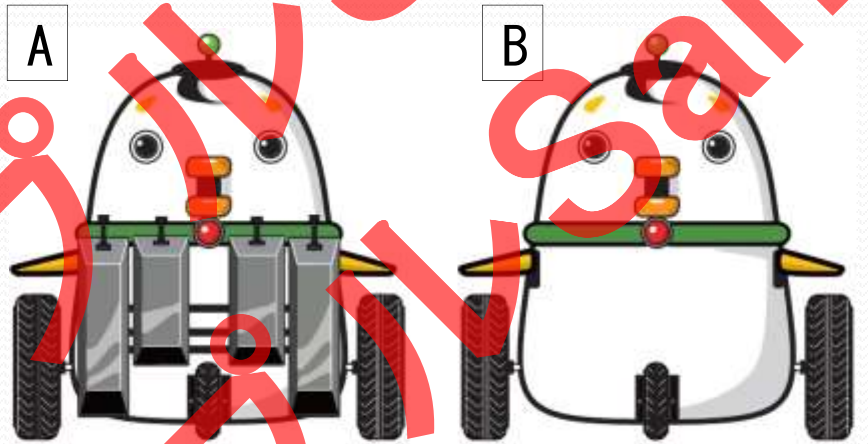
【「反復横跳び・改」の思考実験】

- A(重量型)，B(軽量型)のWDを考え，反復横跳び・改の思考実験に対し，敏捷性を評価する(T=8，4，2[s]と変化)



(a) $T=8$[s]　(b) $T=4$[s]　(c) $T=2$[s]

・T=8：AとBともにほぼキッチリと左右線をまたぎ，ほぼタイムラグなしで，音に合わせて目標の周期運動を実現できている．
・T=4：Aにとってテンポが少し速く，動作が対応できていない．Bは目標の反復運動をほぼ実現できている．
・T=2：両タイプともテンポについてこられていない．AよりBの方が目標の反復運動の追従性が良く，敏捷性が高い．

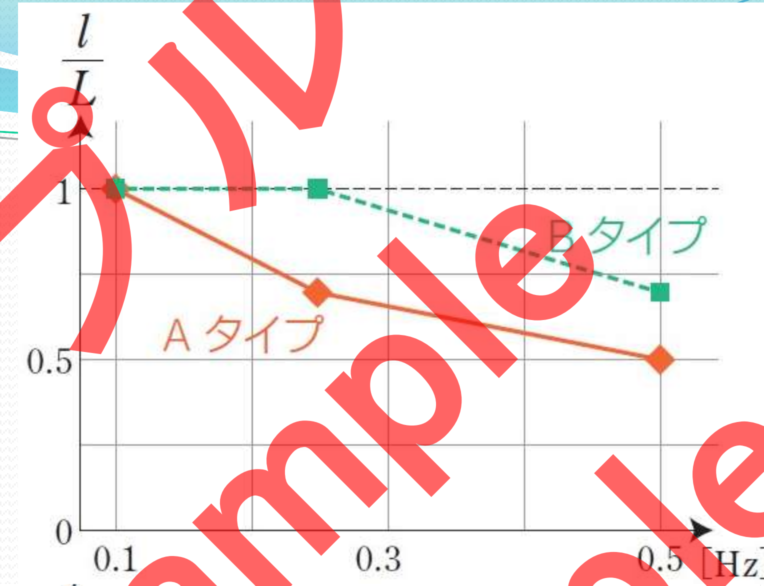


周波数の変化に対する到達距離の比 $\frac{l}{L}$ と時間差と周期の比 $\frac{t_r}{T}$

周波数 f [Hz]		0.125	0.25	0.5
周期 T [s]		8	4	2
到達距離の比 $\frac{l}{L}$	A タイプ	1	0.7	0.5
	B タイプ	1	1	0.7
時間差と周期の比 $\frac{t_r}{T}$	A タイプ	0	-0.25	-0.5
	B タイプ	0	0	-0.25

【思考実験のまとめ】

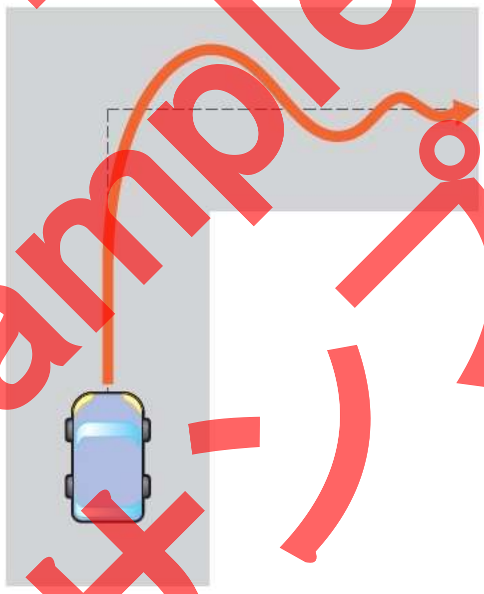
- 周期の代わりに周波数f=1/T[Hz]を用いると分かりやすい．
- 目標距離Lと実際の移動距離lの比l/Lおよび周期分ズレt_r/Tで評価.
- 横軸に周波数fを，縦軸に比l/Lとt_r/Tをとったものでグラフ化.
→周波数変化に対する反復運動の追従性が「到達距離」と「時間差」の数値で一目瞭然



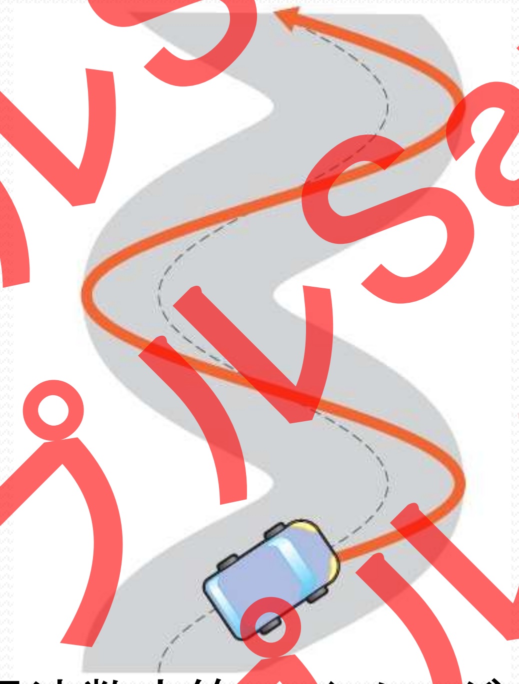
Aは0.1[Hz]までは目標の反復運動を達成でき，Bは0.3[Hz]までは達成できる． それより高い周波数では追従が悪くなる.

【ステップ応答と周波数応答の違い（イメージ）】

- 自動車の性能評価で例えるなら，ステップ応答は試行中に急にハンドルを切った場合の自動車が90度曲がるときの特性に似ている．
- 一方，周波数応答は，ジグザク走行を行ったときの運転性能評価に似ている．



ステップ応答のイメージ



周波数応答のイメージ

7.2 周波数応答の基本事項

反復横跳び・改の階段状の目標位置の入力では数式的に取り扱いが難しい

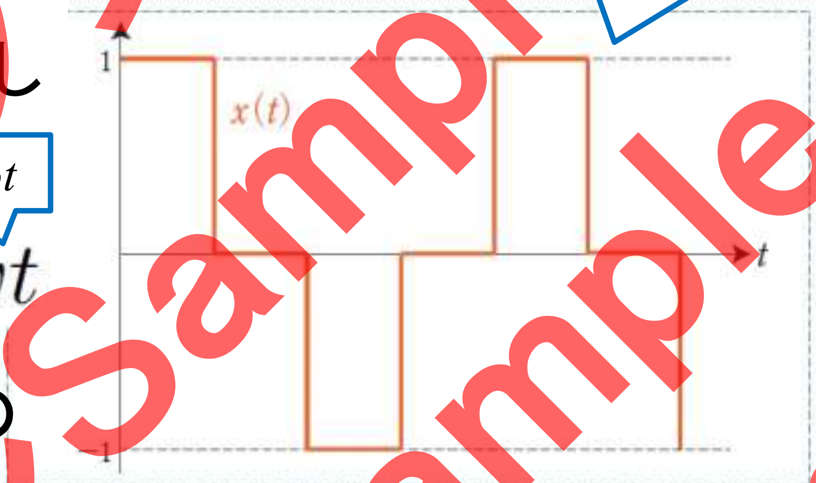
【周波数応答の入力】

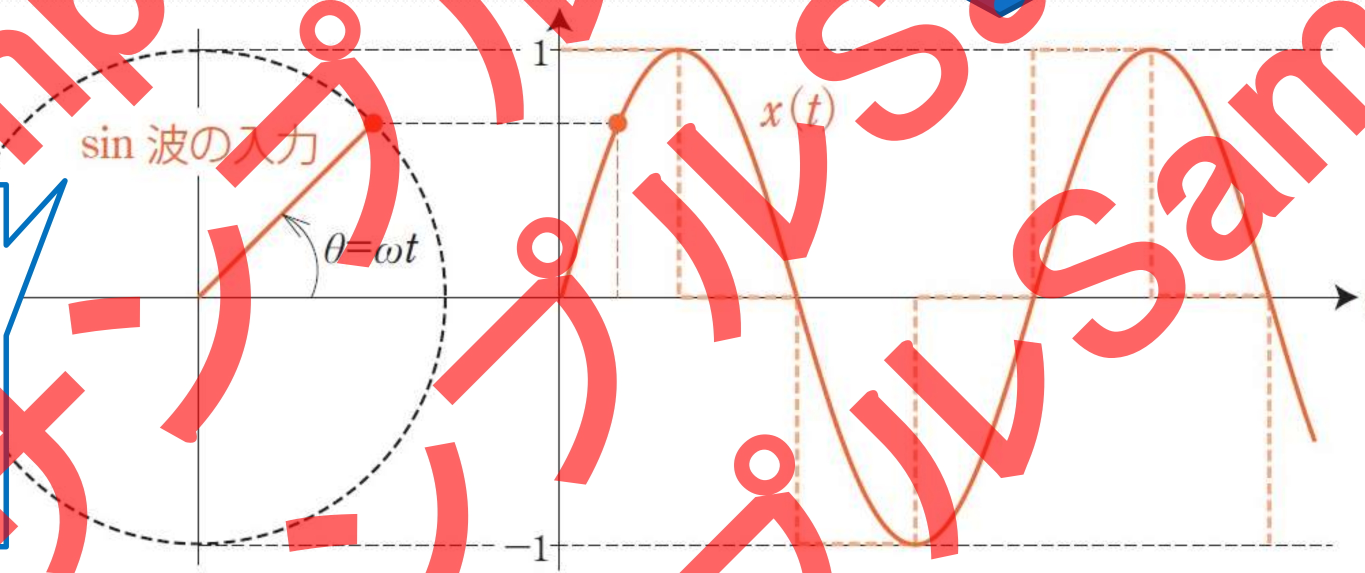
- 実際の周波数応答では入力$x(t)$として以下を与える．

$\theta(t)=\omega t$

$$x(t)=A\sin\theta(t)=A\sin\omega t$$

- $x(t)$は角速度ωで半径Aの円運動の縦方向の値を投影させたもの．





周期運動の「速さ」を周波数の代わりにωを用いて表現することも多い．ωを角周波数や角振動数とも呼ぶ．（$\omega=2\pi f$）

$$x(t) = A\sin\theta(t) = A\sin\omega t$$

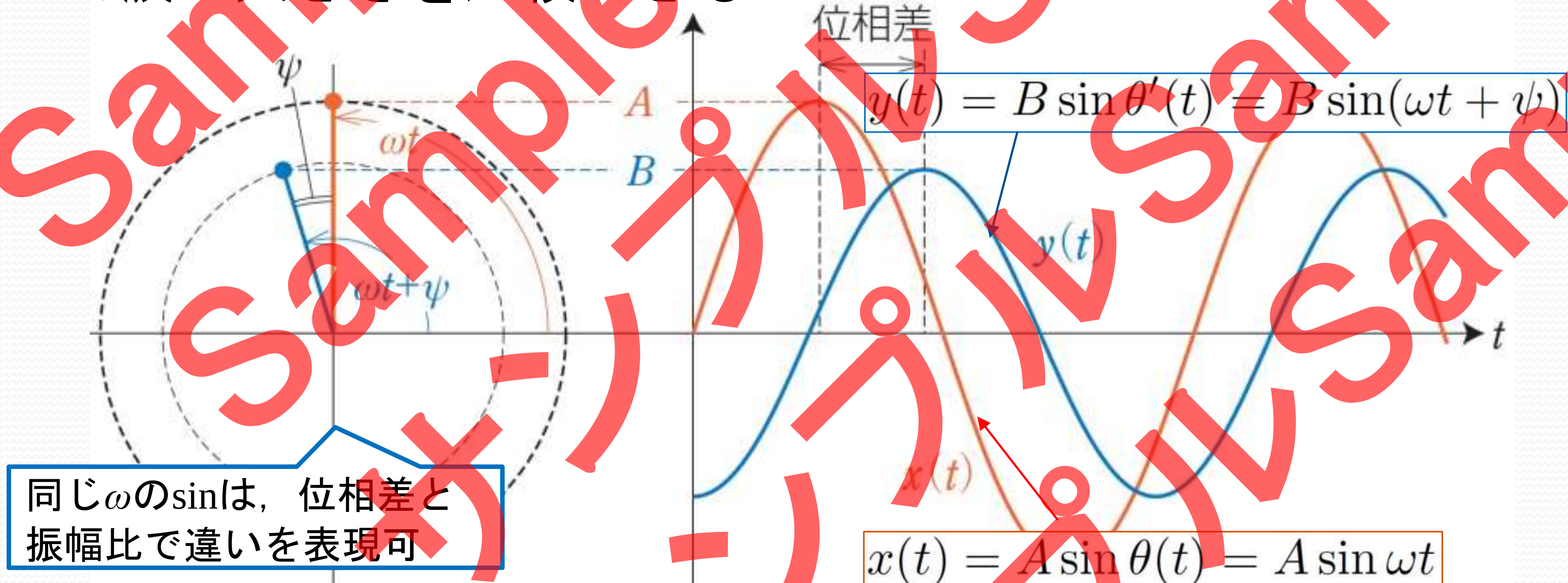
【位相差と振幅比】

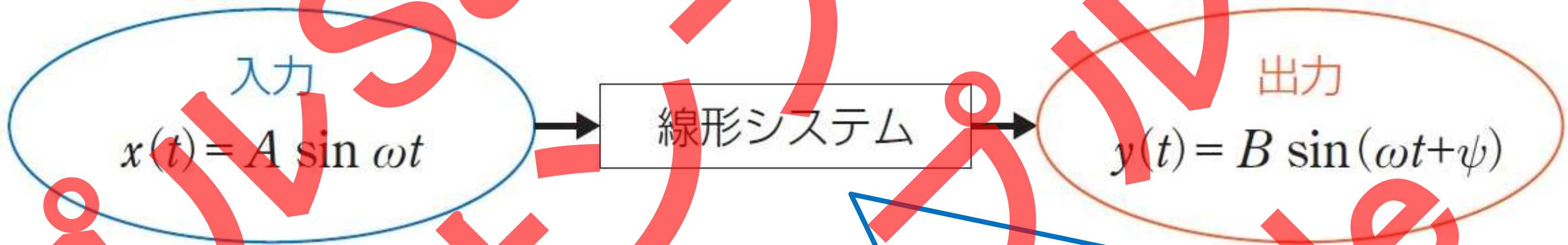
- sinは2πで1周期で$\theta(t)$の値で$x(t)$が周期中のどの段階かを知ることができる．（例：$\theta=\pi$ →1周期の1/2）
- sinの状態（段階）を示す角度$\theta(t)$を，位相角（位相）と呼ぶ．時間t=0のときの位相を初期位相という．
- 次に$x(t)$と同じωを持つ，別のsinの$y(t)$を考える．

$$y(t) = B\sin\theta'(t) = B\sin(\omega t + \psi)$$

Bは振幅，ψは初期位相，$\theta'(t) = \omega t + \psi$

- $x(t)$と$y(t)$の周期運動は角速度は同じだが，ズレが生じている．これを位相で表現すればt=0のときの初期位相の差$\theta'(t) - \theta(t) = \psi$となる．これを位相差（位相のずれ）と呼ぶ．$\psi$=0なら$x(t)$と$y(t)$は一致．$\psi$ >0なら$x(t)$に対し$y(t)$は進んでおり，ψ <0なら$y(t)$は遅れている
- 2つの違いを表現するもう1つが振幅である．振幅比B/Aで波の大きさを比較できる．





線形システムに角周波数ωのsin入力を与えた場合，定常状態で出力$y(t)$は同じωを持つsinとなる．2つの位相と振幅は異なる

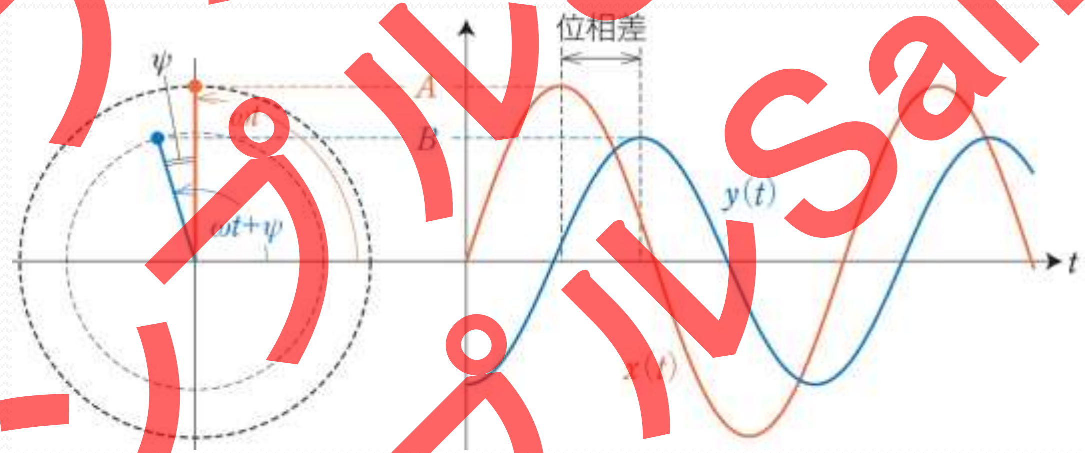
【周波数応答の出力と評価法】

- 周波数応答はsin入力に対し，sin出力を比較し，入出力の位相差と振幅比を調べる．振幅比をゲインとも呼ぶ
- 入力$x(t)$の角周波数ωを変化させ，ωの変化に対する入出力の位相差と振幅比を求め，出力の追従性の変化を評価する．振幅比と位相差を$g(\omega)$と$\Delta\theta(\omega)$とすると，

$$\text{振幅比：}\quad g(\omega) = \frac{B(\omega)}{A}$$

$$\text{位相差：}\quad \Delta\theta(\omega) = \psi(\omega)$$

定義より$g(\omega) \geqq 1$



【ボード線図（ゲイン曲線と位相曲線）】

- 周波数応答は角周波数ωの入出力のsinの振幅比と位相差の変化を調べる．周波数特性を図にまとめたものがボード線図（ゲイン曲線と位相曲線）である．
- ゲイン曲線は振幅比に対し，デシベル値（dB）を使う．

$$g_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log_{10} g(\omega)\ [\mathrm{dB}]$$

- 振幅比をデシベル量で表した$g_{\mathrm{dB}}(\omega)$をデシベルゲインという．デシベルはベル[Bell]の1/10の単位のこと

$$\log_{10}(g(\omega)^2) = 2\log_{10} g(\omega)\quad [\mathrm{Bell}]$$

- ベルは運用上，値が小さく使いづらいので，1/10を単位とした（デシベル（deci-Bell）[dB]）．

ベル単位は，電話の発明者ベルに由来．受話器の音のエネルギは電流の2乗に比例し，それをlog10でとった

単位が1/10になれば，値は10 倍になる（0.5[cm]＝5[mm]）

【デシベルゲインの計算例】

(1) 出力振幅 B が入力振幅 A より小さい場合（$0 \leq g(\omega) < 1$）

例えば，出力振幅が入力振幅の半分で $g(\omega) = \frac{B}{A} = 0.5$ の場合を考えてみよう．式 (7.4) より

$$g_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10} g(\omega) = 20\log_{10} 0.5 = 20\times(-0.301) = -6.02 \text{ [dB]}$$

となり，振幅比 $g(\omega)$ が 1 より小さければ，$g_{\mathrm{dB}} < 0$ となる．

(2) 出力振幅 B が入力振幅 A と同じ場合（$g(\omega) = 1$）

入力と出力の振幅が同じ場合であり，少なくとも振幅比の視点からは出力の追従性が最もよい場合である．

$$g_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10} g(\omega) = 20\log_{10} 1 = 20 \times 0 = 0 \text{ [dB]}$$

となり，$g_{\mathrm{dB}} = 0$ となる．

(3) 出力振幅 B が入力振幅 A より大きい場合（$g(\omega) > 1$）

例えば，出力振幅が入力振幅の 2 倍で $g(\omega) = \frac{B}{A} = 2$ の場合を考えてみよう．

$$g_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10} g(\omega) = 20\log_{10} 2 = 20 \times 0.301 = 6.02 \text{ [dB]}$$

となり，振幅比 $g(\omega)$ が 1 より大きくなれば，$g_{\mathrm{dB}} > 0$ となる．

gdBが正→出力振幅が入力より大．ゼロ→同じ．負→出力が入力より小

【ゲイン曲線】

- 角周波数ωに対する入出力の振幅比の変化を図にしたもの. デシベルゲインを縦軸に，角周波数ωを横軸にとる. （横軸は対数目盛の場合もあり）

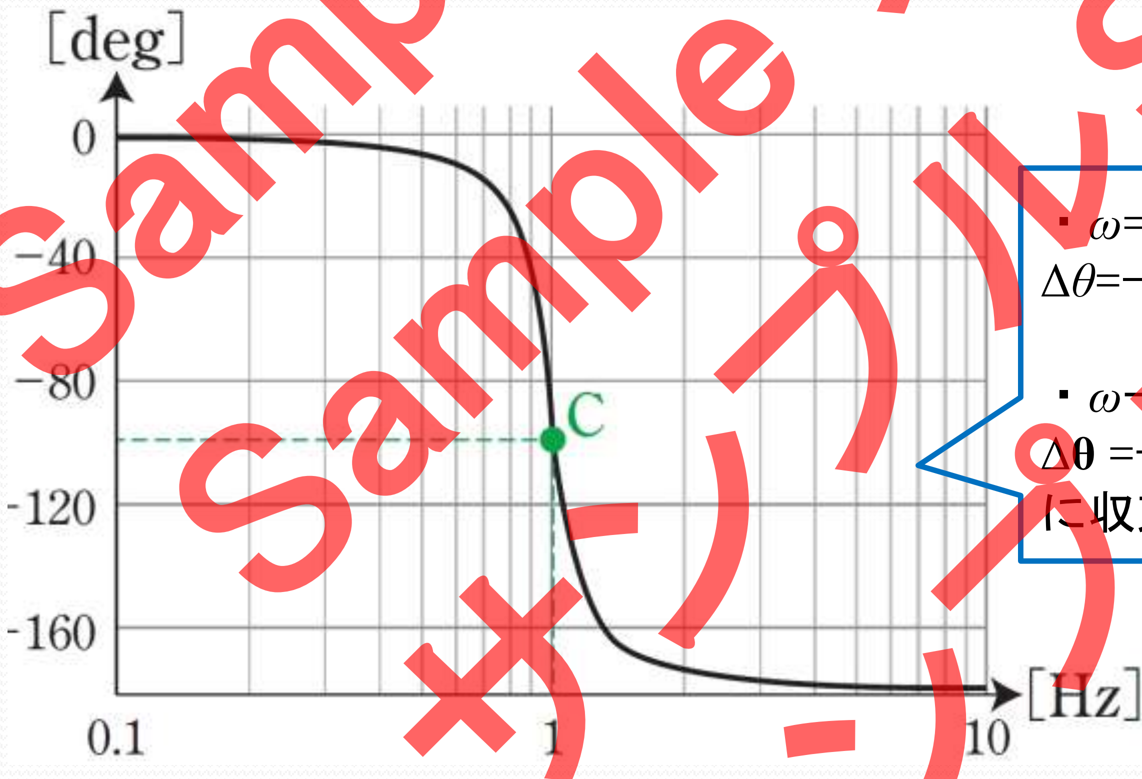
・ω=0〜0.3くらい[Hz]：g_{dB} ≒0, 入出力の振幅がほぼ同じ.

・ω→大：ω=0.6の近辺（点A）はg_{dB} ≒6[dB]，入力に対し出力の振幅が約2 倍

・ω→さらに大：g_{dB}は減少し，出力の振幅が減少. ω=1.5の近辺（点B）ではg_{dB}≒-6[dB]で，出力の振幅は入力の約1/2.

【位相曲線】

- 縦軸に位相差$\Delta\theta(\omega)$をとり，横軸に角周波数ωをとる（横軸は対数目盛の場合もあり）．
- 位相曲線ではωの変化に対し，入力に対する出力の遅れや進みを表現（一般に位相は度数法[deg]）．
- $\Delta\theta$=0に近ければ良好に追従，正→出力は進，負→遅．



・ω=1の近辺（点C）：
$\Delta\theta$=−90[deg]，出力が1/4周期遅れ．

・ω→大：$\Delta\theta$は減少し，
$\Delta\theta$ =−180[deg]に収束．2周期分の遅れに収束．

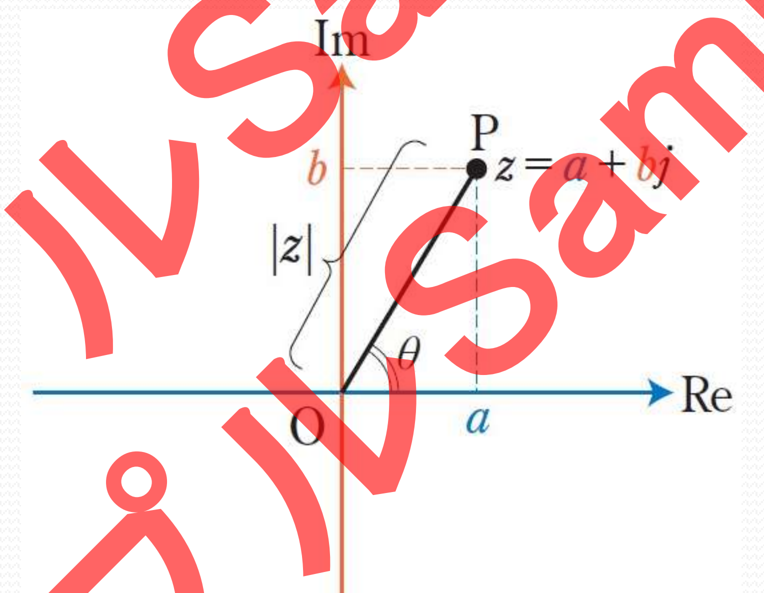
7.3 周波数応答の求め方

- 具体的に周波数応答を求める方法
  （1）解析的手法，（2）数値的手法，（3）実験的手法
- 解析的手法は伝達関数$G(s)$が与えられた場合，$G(s)$から周波数伝達関数を計算し，周波数応答を求めることが可
- 複素平面による周期運動の表現　$z = a + bj$

$$\mathrm{Re}[z] = a, \qquad \mathrm{Im}[z] = b$$

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

偏角 $\theta = \arg z = \tan^{-1} \frac{b}{a}$



$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- 複素平面上で偏角θに対し，複素数zは以下となる．

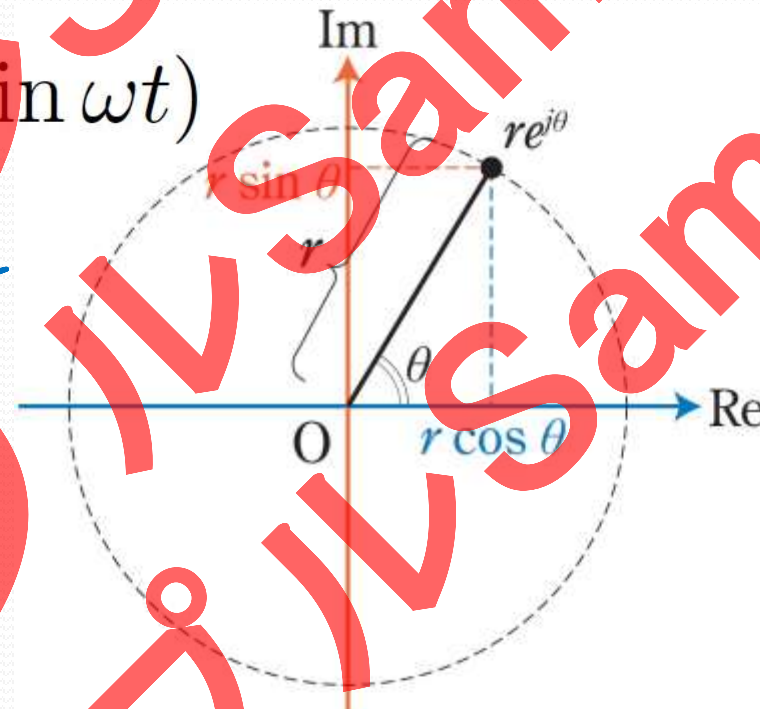
$$z = r(\cos\theta + j\sin\theta)$$

- 偏角θに対し，オイラーの公式が成立

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \qquad z = re^{j\theta}$$

- 偏角θが時間tで一定に変化する$\theta=\omega t$の場合は

$$z = re^{j\omega t} = r(\cos\omega t + j\sin\omega t)$$



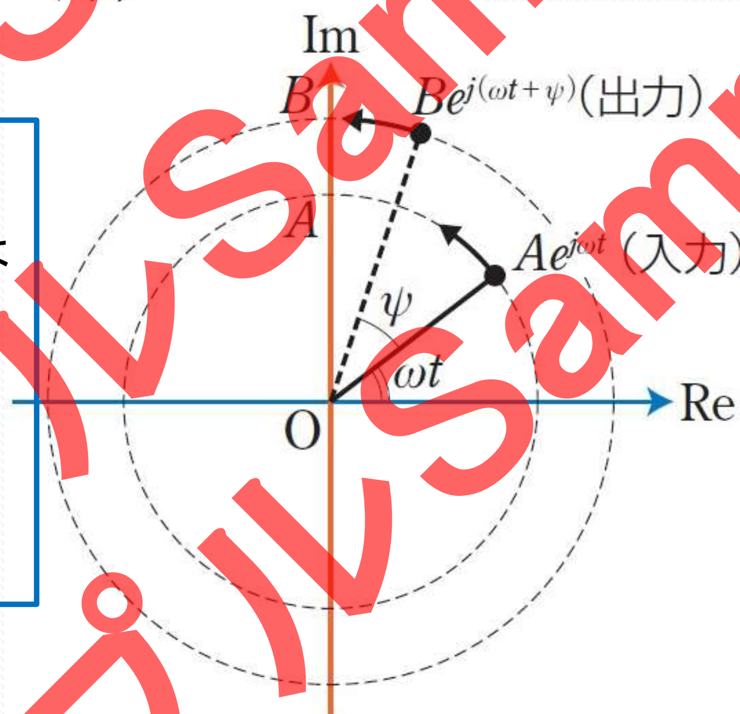
複素平面上で，半径rと角速度ωを持つ等角速度円運動を表現

【周波数伝達関数の求め方】

- 周波数応答における入出力のsinは等角速度ωの円運動の縦軸の値を投影させたものと解釈できる．入力$x(t)$と出力$y(t)$を複素平面上の次式に**<u>置き換え</u>**て考えてみる．

$$
\begin{cases}
\boxed{\text{入力}} & x(t) = A(\cos\omega t + j\sin\omega t) = Ae^{j\omega t} \\
\boxed{\text{出力}} & y(t) = B\big(\cos(\omega t+\psi) + j\sin(\omega t+\psi)\big) = Be^{j(\omega t+\psi)}
\end{cases}
$$

【上式の表記について補足】
数学的には $\sin\omega t \neq e^{j\omega t}$ である．しかし．上式によように複素平面での回転を考えると，同じ角速度ωで回転する入力$x(t)$と出力$y(t)$に対し，2つの偏角の差と出力$y(t)$の半径の大きさ$|y(t)|$を求めることで，周波数応答の振幅比$g(\omega)=B/A$と位相差$\Delta\theta=\psi$を求めることが可能．周波数伝達関数の計算するための工夫である．



$$T\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=Kx(t)$$

【例：1次遅れシステムの周波数伝達関数】

- 1次遅れシステムの運動方程式に複素平面の入出力を代入.

$$TBj\omega e^{j(\omega t+\psi)}+Be^{j(\omega t+\psi)}=KAe^{j\omega t}$$

詳細計算は教科書を参照

$$B(j\omega T+1)e^{j\psi}=KA$$

$$\frac{B}{A}e^{j\psi}=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}e^{j\psi}\quad\begin{cases}\frac{B}{A}=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}\\ \psi=-\tan^{-1}(\omega T)\end{cases}$$

- 伝達関数$G(s)$のsを$j\omega$に置き換えた$G(j\omega)$に対し

$$\boxed{\text{伝達関数}:G(s)=\frac{K}{Ts+1}}\Rightarrow\boxed{G(j\omega)=\frac{K}{T(j\omega)+1}}$$

$$|G(j\omega)|=\frac{K}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}=\frac{B}{A}$$

$$\angle G(j\omega)=-\tan^{-1}(\omega T)=\psi$$

【一般的な周波数伝達関数】

- 伝達関数$G(s)$のシステムに対し，周波数応答を計算するため，$G(j\omega)$を考える．これを**周波数伝達関数**という．
- $G(j\omega)$を用いて，振幅比と位相差は以下となる．これらはωの関数になるので，ωの値を代入すれば，そのωでの振幅比と位相差を計算できる．

周波数伝達関数および振幅比と位相差の求め方

$$\text{伝達関数 } G(s) \quad \Rightarrow \quad \text{周波数伝達関数 } G(j\omega)$$

振幅比（ゲイン） $$|G(j\omega)| = \sqrt{\mathrm{Re}[G(j\omega)]^2 + \mathrm{Im}[G(j\omega)]^2}$$

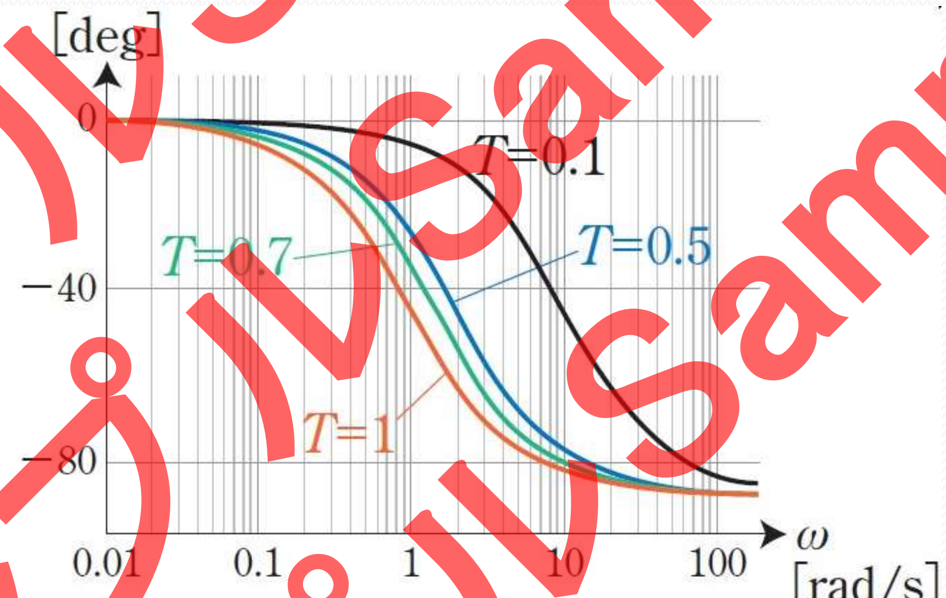
位相差（位相角） $$\angle G(j\omega) = \tan^{-1}\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}$$

【1次遅れシステムの周波数応答】

- 角周波数ωが小さいときには追従性が良く，ωが大きくなるにつれて追従性が悪くなる．
- 出力振幅が入力より大きくならない．位相角は最大で90[deg]遅れる．時定数Tが小さいほど，追従性が良い

ωが小：約0[dB]，約0[deg]　　$\omega = 1/T$：約−3.0[dB]，−45[deg]
ωが大：振幅比→小，位相角−90[deg]に収束

(a)　ゲイン曲線



(b)　位相曲線

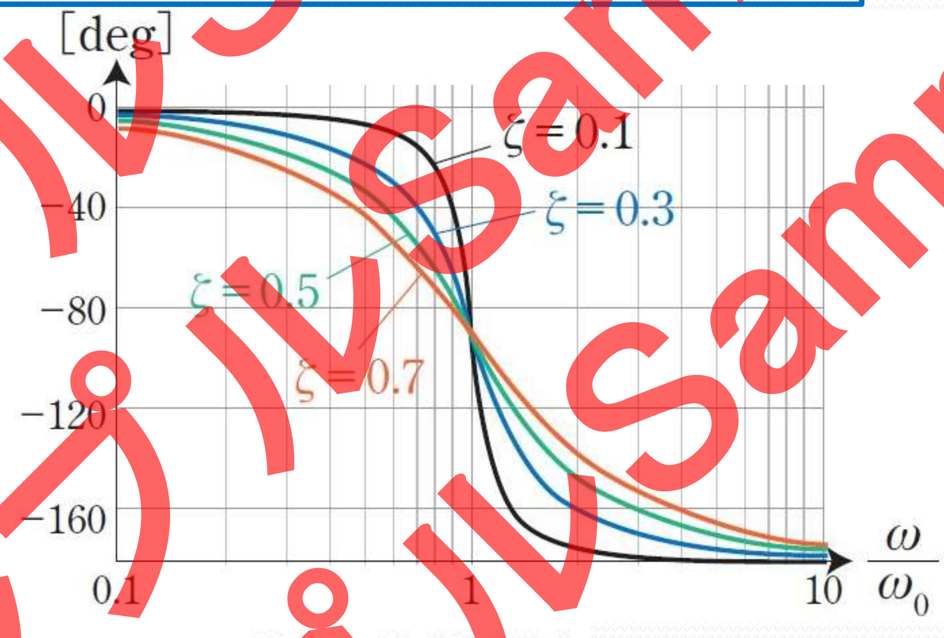
【2次遅れシステムの周波数応答】

横軸をω/ω_0の対数目盛としている

- ωが小さいときは追従性が良く，大きくなるにつれて追従性が悪くなる．$\omega=\omega_0$付近では減衰係数ζが小さい場合に出力振幅は入力以上に大きくなる．
- 位相差は最大で180［deg］まで遅れる．

ωがω_0に比べて十分に小（$\omega/\omega_0 \ll 1$）：位相差≒ゼロ，遅れ少ない．
$\omega=\omega_0$付近：急激に遅れが増加（$\omega=\omega_0$で位相差-90[deg]）
ωがω_0に比べて十分に大（$\omega/\omega_0 \gg 1$）：ωの増加につれ-180［deg]に収束．

(a) ゲイン曲線



(b) 位相曲線

ホイールダック１号開発の進捗

博士は周波数応答を理解することで，モータやセンサ，他にもさまざまな可動部分について周期的な入出力に対する評価ができるようになり，より高性能なホイールダックの開発が可能となった．

まとめ

- 周波数応答とは入力に sin 波を与えたときの応答であり，線形システムでは出力も sin 波となる．
- 周波数応答では，入出力の振幅比と位相差によって評価する．
- ボード線図は，ゲイン曲線と位相曲線からなり，それぞれ周波数に対する振幅比と位相差の変化を表している．
- 伝達関数が得られる場合には，周波数伝達関数を用いることでゲイン曲線と位相曲線を得ることができる．