イラストで学ぶ制御工学

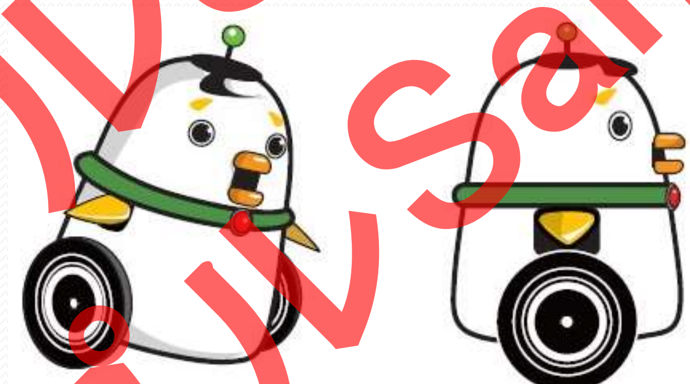
第8章　状態空間表現

中京大学 工学部 機械システム工学科
木野　仁

Information

- このスライドは「イラストで学ぶ制御工学」を講義で活用するために提供されているスライドです．
- 「イラストで学ぶ制御工学」をご購入頂けていない方は，必ずご購入いただいてからご利用ください．

「イラストで学ぶ制御工学（講談社）」
木野仁（著）谷口忠大（監）峰岸桃(絵)



ホイールダックとは

- ホイールダックとは，「イラストで学ぶシリーズ（講談社）」において，主人公の博士と助手が開発していく，アヒル型ロボットである．

1号 2号 @ホーム

姉妹書

- イラストで人工知能概論

ホイールダック2号の開発を通じて人工知能を学ぶ

- イラストでロボット工学

ホイールダック2号アットホームの開発を通じてロボット工学を学ぶ

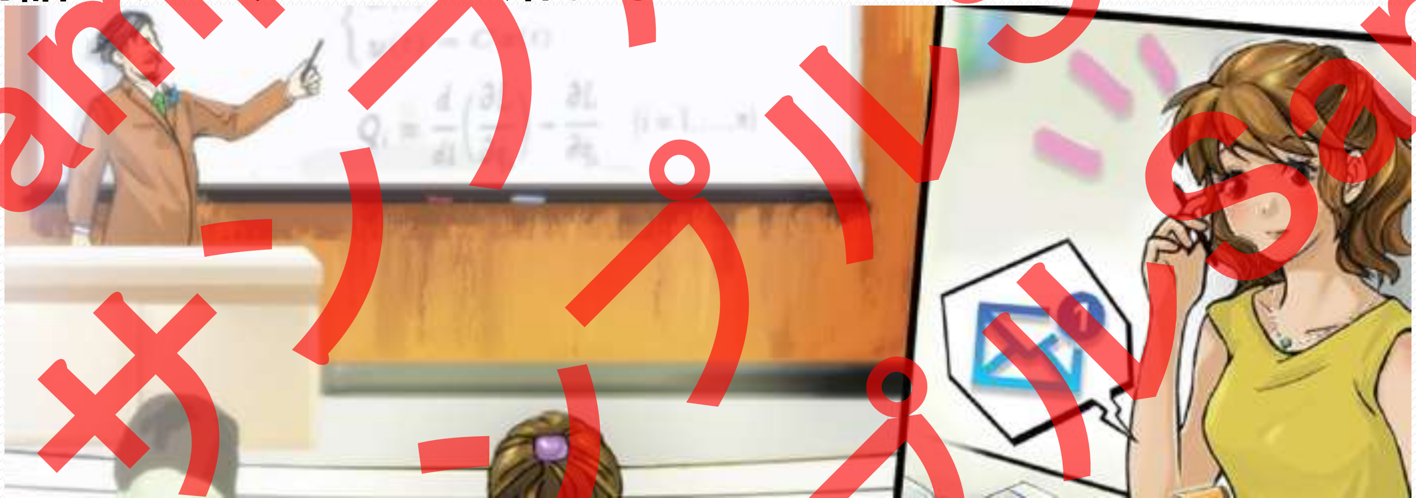
STORY

アメリカのとある大学．留学中の彼女は制御工学の授業に参加していた．彼女には10 歳くらい年上の幼馴染みのお兄さんがいた．最近，彼は日本で会社を作って新しいロボットを作ろうとしているらしい．「昔から，こうと決めたら真っ直ぐな人なんだから」そんな彼のことを微笑ましく思う．彼女は，年上の彼のことを「馬鹿だなぁ」と思いながら，力になりたいと思ったりしていた．

だから彼女は「現代制御理論」の講義を履修しているのだ．講義室の座席で，彼女は顔をあげる．教授が現代制御の導入授業を行っている．その始まりは伝達関数ではない．古典制御理論とは違うスタート地点――「状態空間表現」から現代制御理論は始まる．

そのとき，スマートフォンに日本からメッセージが届いた．添付されていた動画を再生すると，前後に車輪をつけた白い変なロボットが往復運動をしていた．

――もう1つの物語がアメリカの地で始まる．



8.1 状態方程式・出力方程式の基礎

【古典制御から現代制御へ】

- 古典制御は，1入力1出力システムに対し運動方程式をラプラス変換し，伝達関数に基づき制御解析する．
- 現代制御は，t領域の運動方程式をもとにした入出力関係をベクトル・行列を用いて，以下の2つの式のセットで表現する．これを状態空間表現という．

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) & \text{（状態方程式）} \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) & \text{（出力方程式）} \end{cases}$$

- $\boldsymbol{u}(t)$は入力ベクトル（$m\times 1$），$\boldsymbol{y}(t)$は出力ベクトル（$l\times 1$），$\boldsymbol{x}(t)$はシステム内部の状態を示す変数ベクトル（$n\times 1$）．$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$はそれぞれ$n\times n$，$n\times m$，$l\times n$の行列である．古典制御編とは変数の意味が異なるので注意！

【時間微分におけるドット表記】

- 変数$p(t)$に対し，時間tの1階導関数を$p(t)$の上に点を1つ加えて表記する．2階微分する場合には，点を2つ加える

$$\dot{p}(t) = \frac{dp(t)}{dt} \qquad \ddot{p}(t) = \frac{d^2p(t)}{dt^2}$$

- 高校では，$y=f(x)$の微分y'を $y' = \frac{dy}{dx}$ と表記したが，一般に関数yを変数xなどで微分したものである．
- 時間tで変化する$x(t)$に対し$y=f(x(t))$のとき，合成関数の微分より

$$\dot{y}(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}\dot{x}(t) = y'\dot{x}$$

- 例として$y(t)=\sin x(t)$，$x(t)=\omega t$の場合では

$$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \cos x(t) \cdot \omega = \omega \cos \omega t$$

【状態空間表現の例（マス・バネ・ダンパ）】

- 運動方程式は　$m\ddot{x}(t)+\mu\dot{x}(t)+kx(t)=f(t)$
- 入力$u(t)$を力$f(x)$，出力$y(t)$を「距離+速度」とする.

$$y(t)=x(t)+\dot{x}(t)$$

2x1の列ベクトル

- $f(t)=u(t)$とし，加速度を求める（→ベクトル表記）.

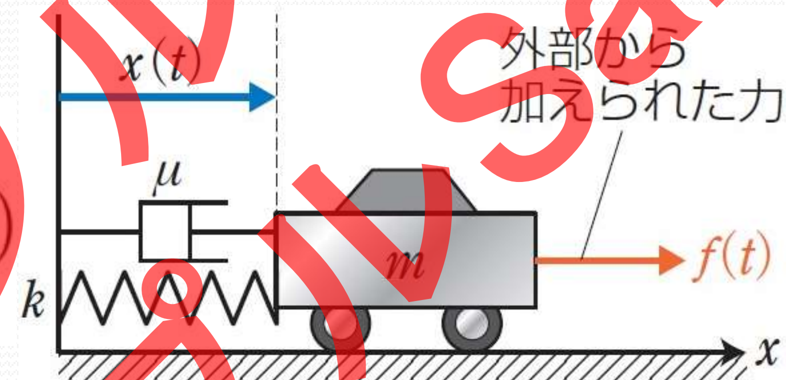
$$\ddot{x}(t)=-\frac{\mu}{m}\dot{x}(t)-\frac{k}{m}x(t)+\frac{1}{m}u(t)$$

1x2の行列（行ベクトル）

$$=\left(-\frac{k}{m},\ -\frac{\mu}{m}\right)\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}+\frac{1}{m}u(t)$$

- $\dot{x}=\dot{x}$ より.

$$\dot{x}(t)=(0,\ 1)\begin{bmatrix}x(t)\\ \dot{x}(t)\end{bmatrix}+0\times u(t)$$



- 元々の運動方程式はベクトル・行列表現が可能.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{\mu}{m} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{x}(t)$を用いて出力$y(t)$は以下で得る.

$$y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$$

$$y(t) = (1, \quad 1) \begin{bmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{C} = (1, \ 1)$$

- まとめると，以下の状態空間表現となる.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) & \text{←状態方程式} \\ y(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) & \text{←出力方程式} \end{cases}$$

- 状態方程式はベクトル・行列で表現した微分方程式.
- 入力$u(t)$が与えられた時，状態方程式を計算して$x(t)$を求める　→出力方程式に代入して出力$y(t)$を計算.
- 状態方程式はベクトル$x(t)$で表現されるシステム内部状態を支配する微分方程式ととらえることができる.
- システム内部状態を示す$x(t)$を状態変数ベクトルと呼ぶ.
- 入力$u(t)$を与えた時の出力$y(t)$は，状態方程式と出力方程式の行列A，B，Cの値で決定される.

→現代制御では行列を解析して，出力などを評価する.

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) & \text{（状態方程式）} \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) & \text{（出力方程式）} \end{cases}$$

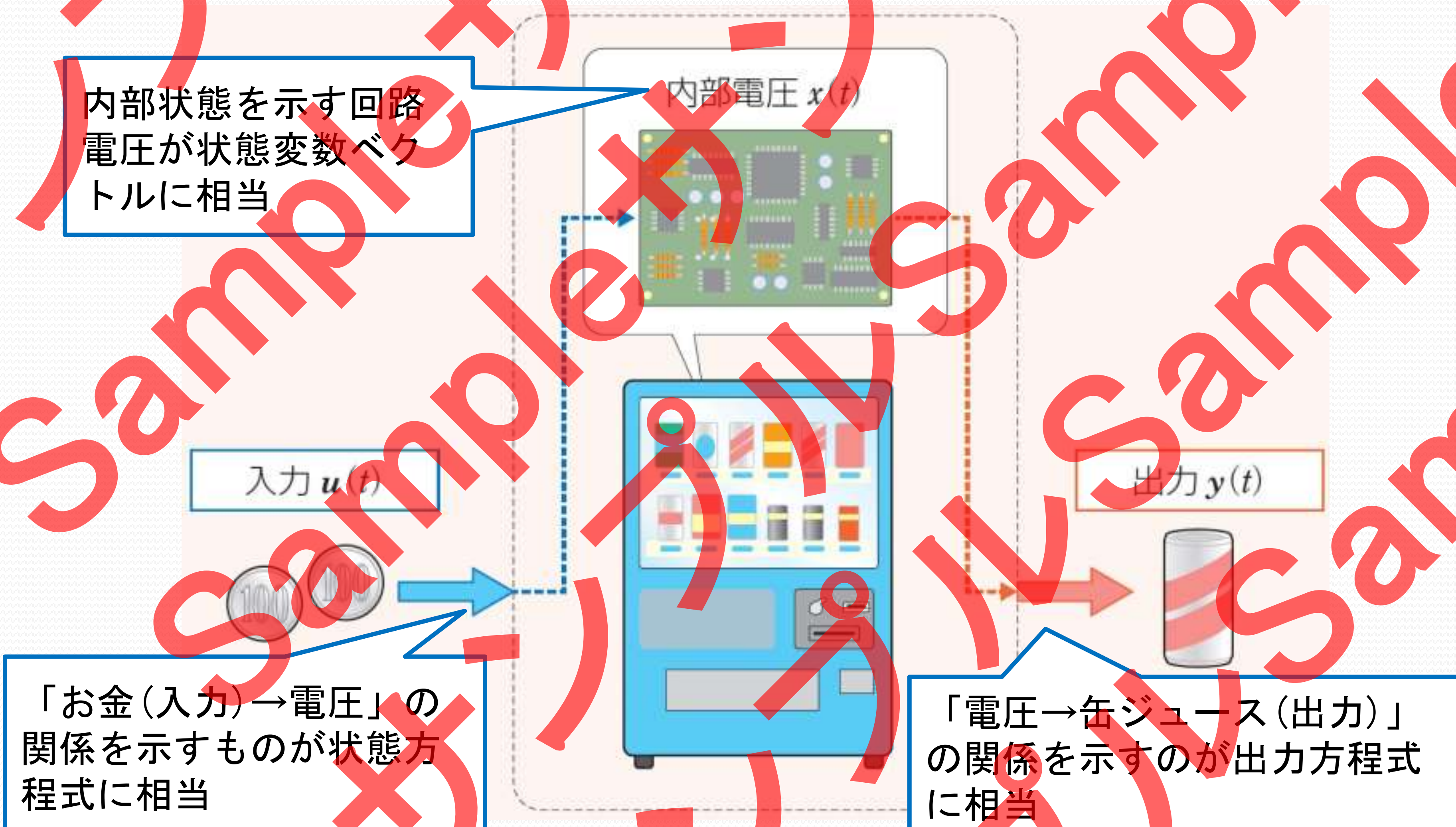
- 現代制御は多入力多出力に対応できる．一般に入力$\boldsymbol{u}(t)$はm個の成分の入力変数ベクトル，出力$\boldsymbol{y}(t)$はl個の成分の，出力変数ベクトルと呼ぶ．状態変数ベクトル$\boldsymbol{x}(t)$はn個の成分からなる．

$$\boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_l(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

- 各行列は$\boldsymbol{A}$（$n \times n$），$\boldsymbol{B}$（$n \times m$），$\boldsymbol{C}$（$l \times n$）
- 各行列の値は時間変化せず一定とする（線形時不変システム）．

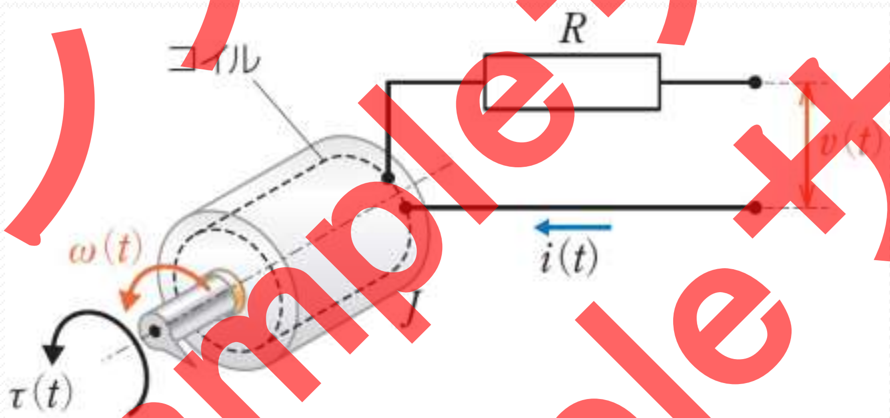
【状態空間表現のイメージ】

- 自動販売機の内部回路は入出力を関連づけている．回路状態は，回路にかかる電圧のみで表現できると考えよう．



5.3.2節の内容と入出力が異なることに注意

【例題 1】 5.3.2 節で解説した直流モータに対し，運動方程式から状態方程式と出力方程式を導出せよ．ただし，本例題では入力 $u(t)$ を直流モータに与える電圧 $v(t)$，出力 $y(t)$ を回転軸の角度 $\theta(t)$ とする．



$$\tau(t) = k_m i(t)$$

$$\tau(t) = J\frac{d\omega(t)}{dt}$$

$$e_c(t) = k_\omega \omega(t)$$

$$v(t) - e_c(t) = Ri(t)$$

k_m：トルク定数
$e_c(t)$：コイル電圧（逆起電力）
k_ω：比例定数

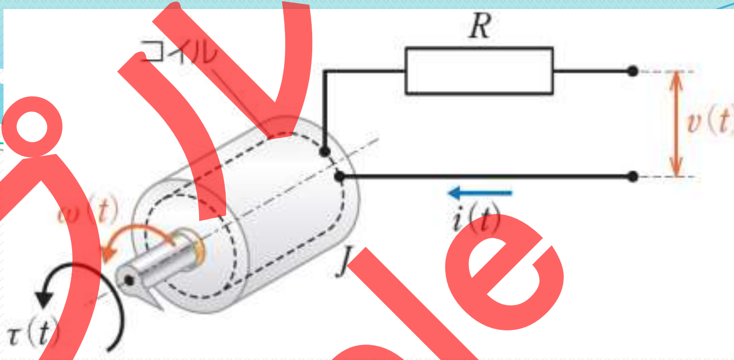
- 式をまとめると，電圧$v(t)$と角速度$\omega(t)$の関係は次式

$$v(t) = \frac{JR}{k_m}\frac{d\omega(t)}{dt} + k_\omega \omega(t)$$

- 入力が電圧$v(t)$，出力は角度$\theta(t)$であり，$\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ より

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{k_m k_\omega}{JR}\dot{\theta}(t) + \frac{k_m}{JR}v(t)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\frac{k_m k_\omega}{JR}\dot{\theta}(t) + \frac{k_m}{JR}v(t)$$



$$\begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_m k_\omega}{JR} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{JR} \end{bmatrix} u(t)$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} u(t) &= v(t) \\ y(t) &= \theta(t) \end{aligned} \qquad y(t) = (1,\ 0)\begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}u(t) \\ y(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_m k_\omega}{JR} \end{bmatrix}&, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_m}{JR} \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{C} = (1, 0) \end{aligned}}$$

8.2 ラグランジュの運動方程式

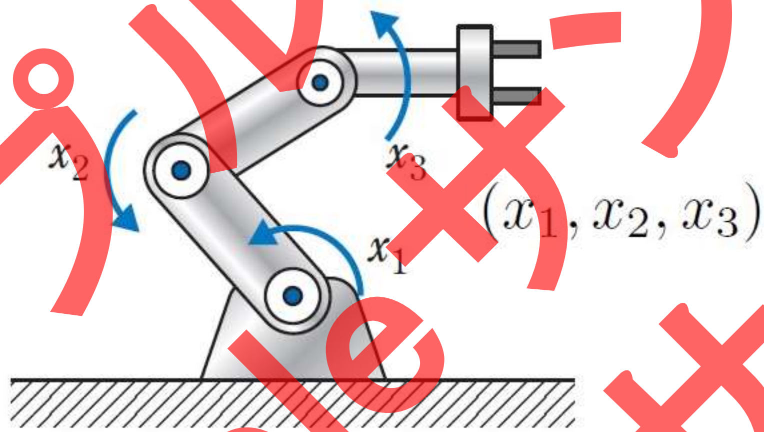
- 一般にシステムが複雑になると，運動方程式の導出が複雑になる．運動方程式の導出は大別すると，力・トルクのつり合いに着目する方法とエネルギに着目する方法がある（紹介してきた運動方程式の導出では，前者の方法）．
- 後者のラグランジュの運動方程式では，回転と並進の運動が組み合わさったシステムや機械と電気が組み合わさったシステムなど，前者では取り扱いが難しいシステムでも同一の手順で運動方程式が導出できる．
- 物体運動における自由度とは，運動を記述する変数において，独立して変化できる変数の数をいう．

(a) 2自由度

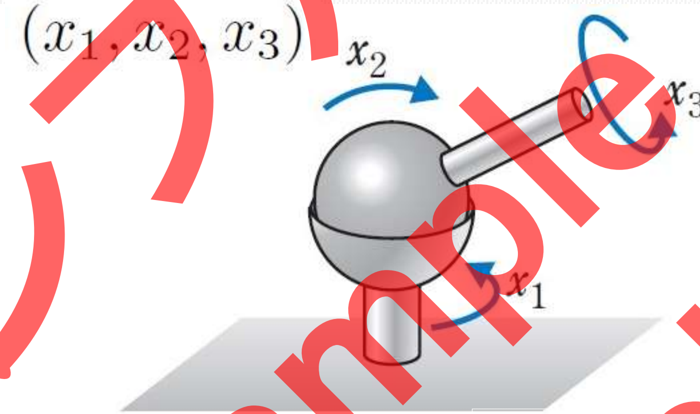
(b) 3自由度

(c) 1自由度

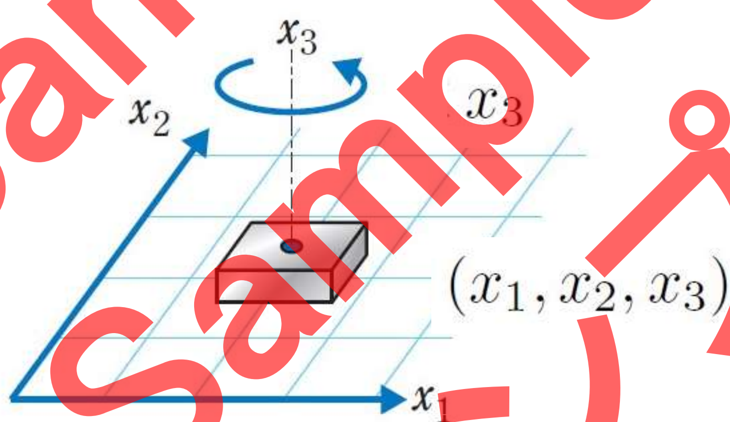
(d) 2自由度



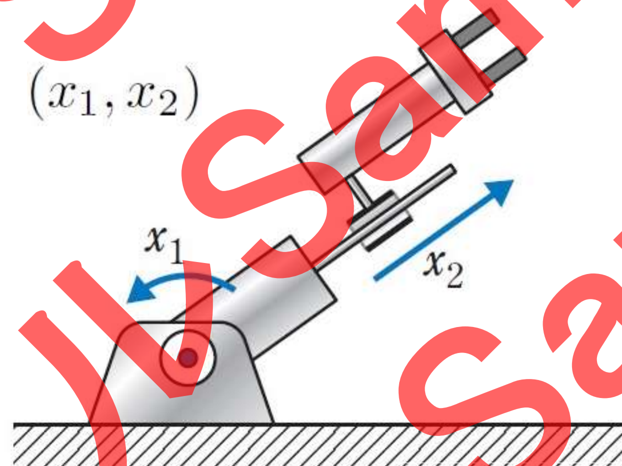
(a) 3自由度



(b) 3自由度



(c) 3自由度



(d) 2自由度

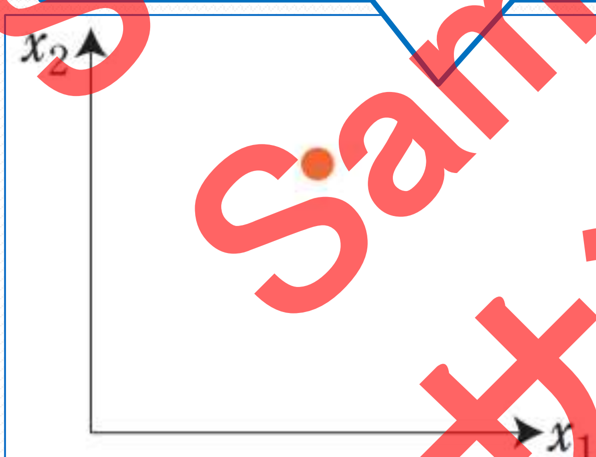
【一般化座標・一般化速度・一般化力】

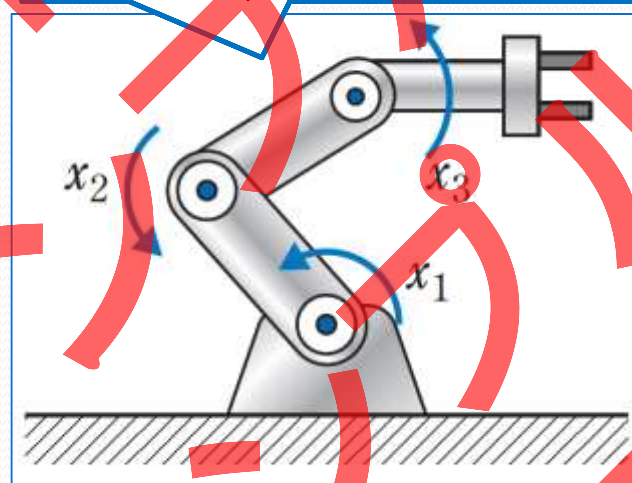
- 対象システムの自由度をnとし，変位（回転or並進）を$q_1, q_2, \ldots, q_n$とし，一般化座標と呼ぶ．一般化座標を時間tで微分したものを一般化速度と呼ぶ．
- 一般化座標q_iに対応した力（or トルク）に相当する変数をQ_iとし，一般化力と呼ぶ（並進→力，回転→トルク）．

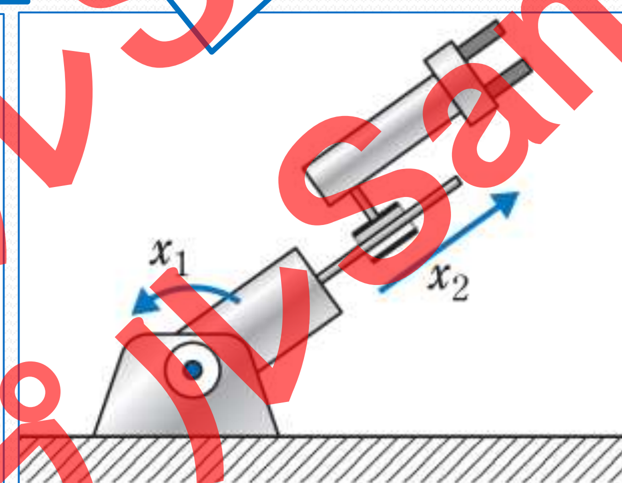
一般化座標（q_1，q_2）は距離（x_1，x_2），一般化力（Q_1，Q_2）は対応した並進力

一般化座標（q_1，q_2，q_3）は角度（x_1，x_2，x_3），一般化力（Q_1，Q_2，Q_3）は対応したトルク．

一般化座標x_1が角度，x_2が距離，一般化力Q_1がトルク，Q_2は並進力．







【ラグランジュの運動方程式の導出（摩擦を無視）】

摩擦を無視できるシステムに対し，対象システムの運動エネルギの総和を K とし，ポテンシャルエネルギの総和を P とする．このとき，ラグランジュ関数（ラグラジアン）と呼ばれる関数 L を以下で定義する．

$$L = K - P \tag{8.17}$$

ここで，ラグランジュ関数 L を用いて，i 番目の一般化座標 q_i に対する一般化力 Q_i は次式で与えられる．

$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8.18}$$

式 (8.18) が，i 番目の一般化力に対する運動方程式であり，運動の自由度が n の場合には一般化力が n 個となり，上式の計算を n 回行うことで，システム全体の運動方程式を得ることができる．

【ラグランジュの運動方程式の導出（粘性摩擦あり）】

対象システムの i 番目の一般化座標における粘性抵抗係数を μ_i とし，粘性摩擦力（またはトルク）を $f_{\mu_i} = \mu_i \dot{q}_i$ の場合を考える．このとき，粘性摩擦に関して散逸関数 M を考える．

$$M = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\mu_i \dot{q}_i^2\right) \tag{8.19}$$

式 (8.19) と式 (8.17) のラグランジュ関数 L を用いることで，i 番目の一般化力に対する運動方程式は次式で示される．

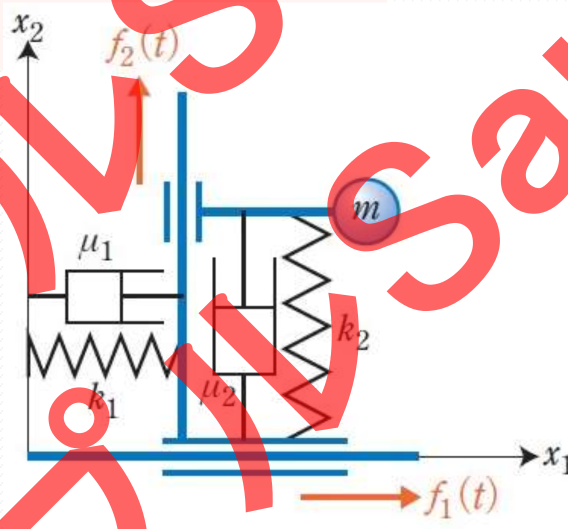
$$Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{8.20}$$

摩擦を無視できるシステムと同様に，上式の計算を n 回行うことで，システム全体の運動方程式を得ることができる．

8.3 ラグランジュ運動方程式導出の例題

【例題 2】 図 8.6 のシステムを考える．これは質量 m の物体が x_1 軸方向と x_2 軸方向に独立に運動する並進 2 自由度のマス・バネ・ダンパシステムである．物体の変位を $x_1(t)$ と $x_2(t)$ とし，それぞれの方向に与えられる力を $f_1(t)$，$f_2(t)$ とする．各方向には独立したバネとダンパが接続されており，これらのバネ定数と粘性抵抗係数を k_1，k_2，μ_1，μ_2 とする．ただし，バネの伸びは $x_1 = x_2 = 0$ からの距離とし，重力の影響はないものとする．

このシステムについて，ラグランジュの運動方程式を求め，それを状態空間表現にせよ．ただし，入力は物体に与える力（$f_1(t)$，$f_2(t)$）とし，出力は物体の変位（$x_1(t)$，$x_2(t)$）とする．



- 一般化座標を$q_1=x_1(t)$，$q_2=x_2(t)$．一般化力を$Q_1=f_1(t)$，$Q_2=f_2(t)$とする．システム全体の運動エネルギKは

$$K=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1(t)^2+\dot{x}_2(t)^2\right)$$

- 重力影響なく，ポテンシャルエネルギPはバネのみ考慮し，

$$P=\frac{1}{2}\left(k_1x_1(t)^2+k_2x_2(t)^2\right)$$

- 従って，ラグランジュ関数Lは次式となる．

$$L=K-P=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1(t)^2+\dot{x}_2(t)^2\right)-\frac{1}{2}\left(k_1x_1(t)^2+k_2x_2(t)^2\right)$$

- 粘性摩擦を考慮し，散逸関数M は次式となる．

$$M=\frac{1}{2}\left(\mu_1\dot{x}_1(t)^2+\mu_2\dot{x}_2(t)^2\right)$$

- 一般化座標$q_i=x_i(t)$に関して（$i=1,2$），以下を計算．

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i(t), \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = m\ddot{x}_i(t)$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{\partial L}{\partial x_i} = -k_i x_i(t), \qquad \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial M}{\partial \dot{x}_i} = \mu_i \dot{x}_i(t)$$

- これらを $Q_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial M}{\partial \dot{q}_i}$ に代入．一般力$Q_i=f_i(t)$より

$$f_i(t) = m\ddot{x}_i(t) + \mu_i \dot{x}_i(t) + k_i x_i(t)$$

$$\ddot{x}_i(t) = -\frac{\mu_i}{m}\dot{x}_i(t) - \frac{k_i}{m}x_i(t) + \frac{1}{m}f_i(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & 0 & -\frac{\mu_1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{m} & 0 & -\frac{\mu_2}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

- 状態空間表現にまとめると

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) & \text{(状態方程式)} \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) & \text{(出力方程式)} \end{cases}$$

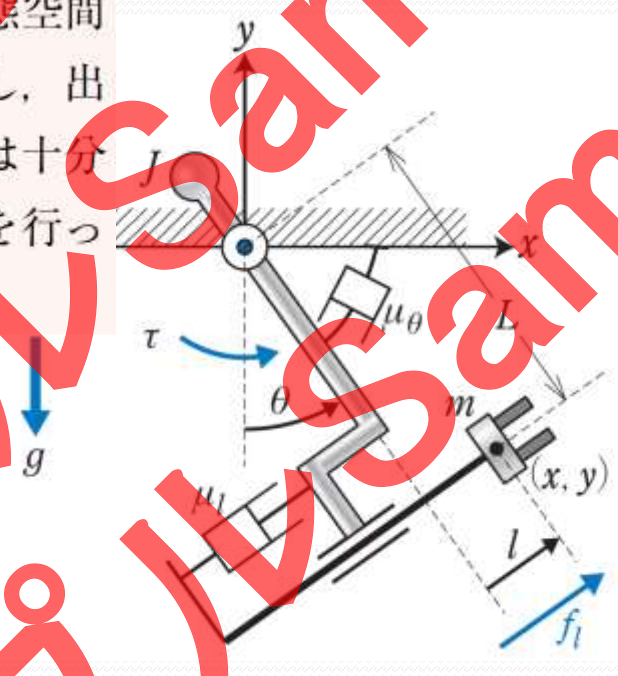
$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1}{m} & 0 & -\frac{\mu_1}{m} & 0 \\ 0 & -\frac{k_2}{m} & 0 & -\frac{\mu_2}{m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ターウェイト[7]が存在し，リンク1の重心と関節1の回転中心は同じとする．また，リンク2の先端にはロボットハンドが設置されている．リンク2は極めて軽量であり，先端部に質量 m のハンドが集中的に存在しているとみなす．

各関節にはダンパが存在する．リンク1の重心まわりの慣性モーメントを J とする．関節1の回転角を $\theta(t)$，そのトルクを $\tau(t)$ とし，関節2の移動距離を $l(t)$ とし，その並進力を $f_l(t)$ とする．また，ロボットハンドの位置を $(x(t),\ y(t))$ とする．その他の各パラメータは図8.7に示すとおりである．

このシステムのラグランジュの運動方程式を求め，それを状態空間表現にせよ．入力は関節に与えるトルク・力（$\tau(t), f_l(t)$）とし，出力は関節変位（$\theta(t), l(t)$）とする．ただし，本例題では $|\theta(t)|$ は十分小さいとし，$\theta(t) = l(t) = \dot{\theta}(t) = \dot{l}(t) = 0$ の近傍で線形近似を行ってよい．



- 一般化座標($\theta(t)$, $l(t)$)とハンド位置($x(t)$, $y(t)$)の関係

$$\begin{cases} x(t) = L\sin\theta(t) + l(t)\cos\theta(t) \\ y(t) = -L\cos\theta(t) + l(t)\sin\theta(t) \end{cases}$$

- 上式を時間微分して

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = L\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) + \dot{l}(t)\cos\theta(t) - l(t)\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) \\ \dot{y}(t) = L\dot{\theta}(t)\sin\theta(t) + \dot{l}(t)\sin\theta(t) + l(t)\dot{\theta}(t)\cos\theta(t) \end{cases}$$

- システム全体の運動エネルギK

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}m(\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2) \\ &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}m\left[(L^2 + l(t)^2)\dot{\theta}(t)^2 + \dot{l}(t)^2\right] + mL\dot{l}(t)\dot{\theta}(t \end{aligned}$$

- リンク1は重力の影響無．全ポテンシャルエネルギPは

$$P = mgy = mg(-L\cos\theta(t) + l(t)\sin\theta(t))$$

- 各関節にダンパが存在し．散逸関数Mは以下となる

$$M = \frac{1}{2}\mu_\theta \dot{\theta}(t)^2 + \frac{1}{2}\mu_l \dot{l}(t)^2$$

- 一般化座標$q_1=\theta(t)$，$q_2=l(t)$，一般化力$Q_1=\tau(t)$，$Q_2=f_l(t)$と考える．$L=K-P$として計算すると

$$\tau(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} + \frac{\partial M}{\partial \dot{\theta}}$$

$$f_l(t) = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{l}} - \frac{\partial L}{\partial l} + \frac{\partial M}{\partial \dot{l}}$$

$$\begin{cases} \tau(t) = J\ddot{\theta}(t) + m(L^2 + l(t)^2)\ddot{\theta}(t) + 2ml(t)\dot{l}(t)\dot{\theta}(t) + mL\ddot{l}(t) \\ \qquad\qquad + mg(L\sin\theta(t) + l(t)\cos\theta(t)) + \mu_\theta\dot{\theta}(t) \\ f_l(t) = m\ddot{l}(t) + mL\ddot{\theta}(t) - ml(t)\dot{\theta}(t)^2 + mg\sin\theta(t) + \mu_l\dot{l}(t) \end{cases}$$

$$\sin\theta(t) \fallingdotseq \theta(t), \quad \cos\theta(t) \fallingdotseq 1, \quad l(t)^2 \fallingdotseq 0, \quad \dot{l}(t)\dot{\theta}(t) \fallingdotseq 0, \quad \dot{\theta}(t)^2 \fallingdotseq 0$$

- 仮定より線形近似する.

$$\begin{cases} \tau(t) = (J + mL^2)\ddot{\theta}(t) + mL\ddot{l}(t) + mgL\theta(t) + mgl(t) + \mu_\theta\dot{\theta}(t) \\ f_l(t) = m\ddot{l}(t) + mL\ddot{\theta}(t) + mg\theta(t) + \mu_l\dot{l}(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} J + mL^2 & mL \\ mL & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{l}(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mu_\theta & 0 \\ 0 & \mu_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{l}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mgL & mg \\ mg & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau(t) \\ f_l(t) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{l}(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{Jm} \begin{bmatrix} m & -mL \\ -mL & J + mL^2 \end{bmatrix} \left(-\begin{bmatrix} \mu_\theta & 0 \\ 0 & \mu_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ \dot{l}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} mgL & mg \\ mg & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ l(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau(t) \\ f_l(t) \end{bmatrix} \right)$$

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) & \text{(状態方程式)} \\ \boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) & \text{(出力方程式)} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ l(t) \\ \dot{\theta}(t) \\ \dot{l}(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u}(t) = \begin{bmatrix} \tau(t) \\ f_l(t) \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{y}(t) = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ l(t) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{Jm} \begin{bmatrix} 0 & 0 & Jm & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Jm \\ 0 & -m^2 g & -m\mu_\theta & mL\mu_l \\ -Jmg & m^2 gL & mL\mu_\theta & -(J+mL^2)\mu_l \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{Jm} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ m & -mL \\ -mL & J+mL^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ホイールダック１号開発の進捗

彼女はラグランジュの運動方程式を線形近似し，現代制御の基本となる状態空間表現を学んだ．このテクニックを武器に彼女のアメリカでのチャレンジが始まる！

まとめ

- 現代制御の基本である状態空間表現は，式 (8.1) の状態方程式と出力方程式で構成される．
- ラグランジュの運動方程式は，式 (8.18) や式 (8.20) を計算することで得られる．
- システムの運動方程式が非線形微分方程式の場合には，適切に線形近似することで，状態空間表現にすることができる場合がある．