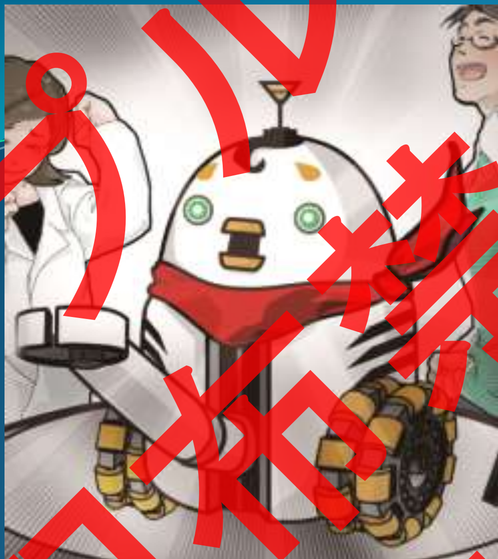


ロボット工学

第13回 ロボットの動力学

福岡工業大学 工学部 知能機械工学科

木野 仁

Information

- このスライドは「イラストで学ぶロボット工学」を講義で活用したり，勉強会で利用したりするために提供されているスライドです．
- 「イラストで学ぶロボット工学」をご購入頂けていない方は，必ずご購入いただいてからご利用ください．

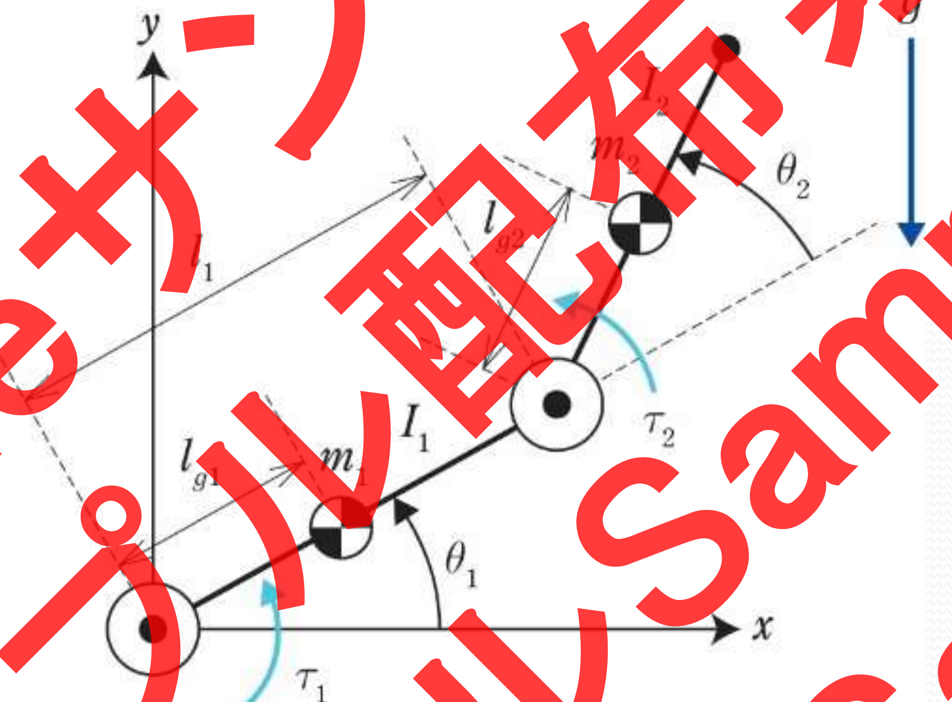
STORY ロボットの動力学

- おじいちゃんの家でほっこりする三人．ホイールダック2 号はこれまでのことを思い出していた．マニピュレータ（ロボットアーム）をもってからというもの，いろんなことができるようになったが，今ひとつ自分のマニピュレータを自らのものとして自由自在に動かせている気がしない．
- 自分自身としては各関節にトルクを加えてマニピュレータを動かすのだが，各関節にどれだけの力を加えれば，手先とそれぞれの関節がどのように動き，また，手先をどのように動かせば，各関節にどれだけの力が加わるのかよくわかっていないのだ．
- ホイールダック2 号はそういうマニピュレータの性質すべてを理解したいと思った．そう，ホイールダック2 号が知りたかったこと．それが動力学なのである．

Contents

- 13.1　2リンク2関節マニピュレータの運動方程式
- 13.2　順運動学と逆運動学
- 12.3　計算トルク法による軌道制御

- ロボットの運動方程式を知ることが，ロボットの制御や動作解析をするうえで重要なポイントとなる．2 リンク2 関節マニピュレータの運動方程式を導出する．
- ただし，これまでとは異なり，各リンクの慣性モーメントをリンク重心周りで設定している．



l_i ：i 番目リンクのリンク長

m_i ：i 番目リンクの質量

I_i ：リンク i のリンク重心周りの慣性モーメント

l_{gi} ：i 番目関節の回転中心から i 番目リンクの重心までの距離

$$\begin{cases} K_1 = \dfrac{1}{2}m_1(\dot{x}_{m1}^2 + \dot{y}_{m1}^2) + \dfrac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 \\ K_2 = \dfrac{1}{2}m_2(\dot{x}_{m2}^2 + \dot{y}_{m2}^2) + \dfrac{1}{2}I_2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} P_1 = m_1 l_{g1} g \sin\theta_1 \\ P_2 = m_2 l_1 g \sin\theta_1 + m_2 l_{g2} g \sin(\theta_1 + \theta_2) \end{cases}$$

$K = K_1 + K_2$ $\quad$ $P = P_1 + P_2$

ラグランジュ関数 $L = K - P$

$$\tau_i = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i}$$

$$\boldsymbol{\tau} = M(\boldsymbol{\theta})\ddot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta})$$

$$\boldsymbol{\tau} = (\tau_1,\ \tau_2)^\top,\ \ \boldsymbol{\theta} = (\theta_1,\ \theta_2)^\top$$

$$M(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = I_1 + I_2 + m_1 l_{g1}^2 + m_2(l_1^2 + l_{g2}^2 + 2 l_1 l_{g2} \cos\theta_2)$$

$$M_{12} = M_{21} = I_2 + m_2(l_{g2}^2 + l_1 l_{g2} \cos\theta_2)$$

$$M_{22} = I_2 + m_2 l_{g2}^2$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{\theta}, \dot{\boldsymbol{\theta}}) = \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_{g2} \dot{\theta}_2 (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \sin\theta_2 \\ m_2 l_1 l_{g2} \dot{\theta}_1^{\,2} \sin\theta_2 \end{pmatrix}$$

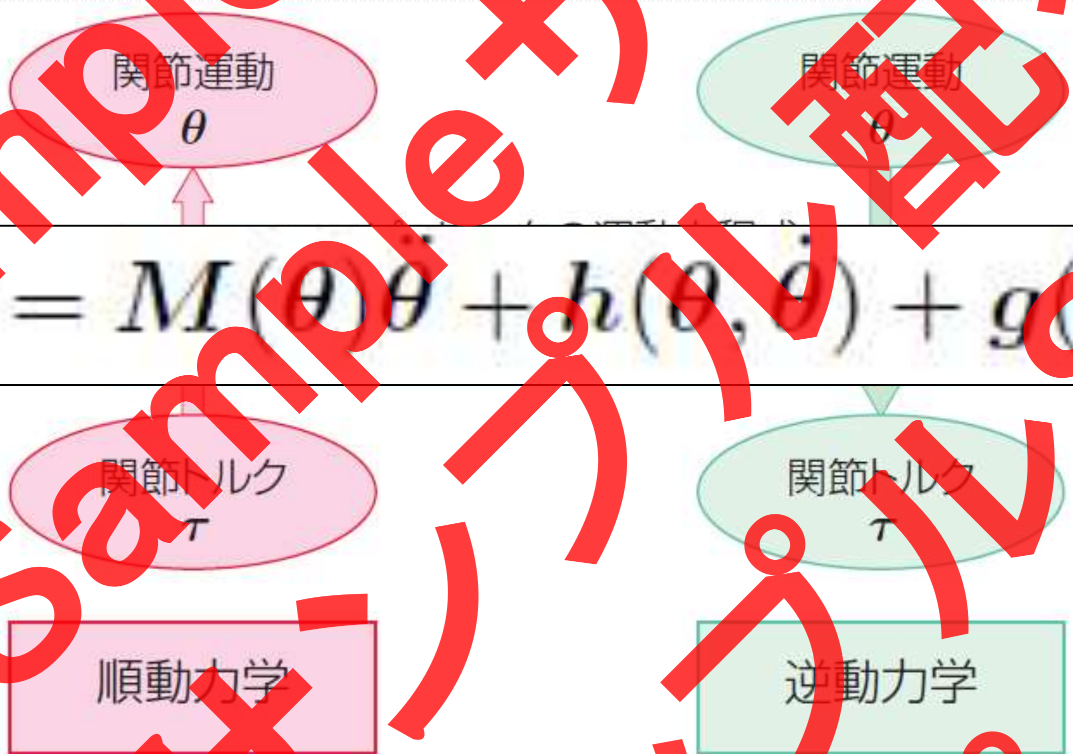
$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} m_1 g l_{g1} \cos\theta_1 + m_2 g \left(l_1 \cos\theta_1 + l_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \right) \\ m_2 g l_{g2} \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}$$

Contents

- 13.1　2リンク2関節マニピュレータの運動方程式
- 13.2　順運動学と逆運動学
- 12.3　計算トルク法による軌道制御

13.2.1 動力学の分類

- 運動方程式を用いることで動力学の観点からの運動解析が可能となる．動力学は2つに大別できる．
- 順動力学は運動方程式を介して，「特定の関節トルクを与えたときに，結果的に生じる関節運動を計算する方法」である．
- 逆動力学は，「特定の関節運動を考えたときに，それを実現させる関節トルクを計算する方法」である．

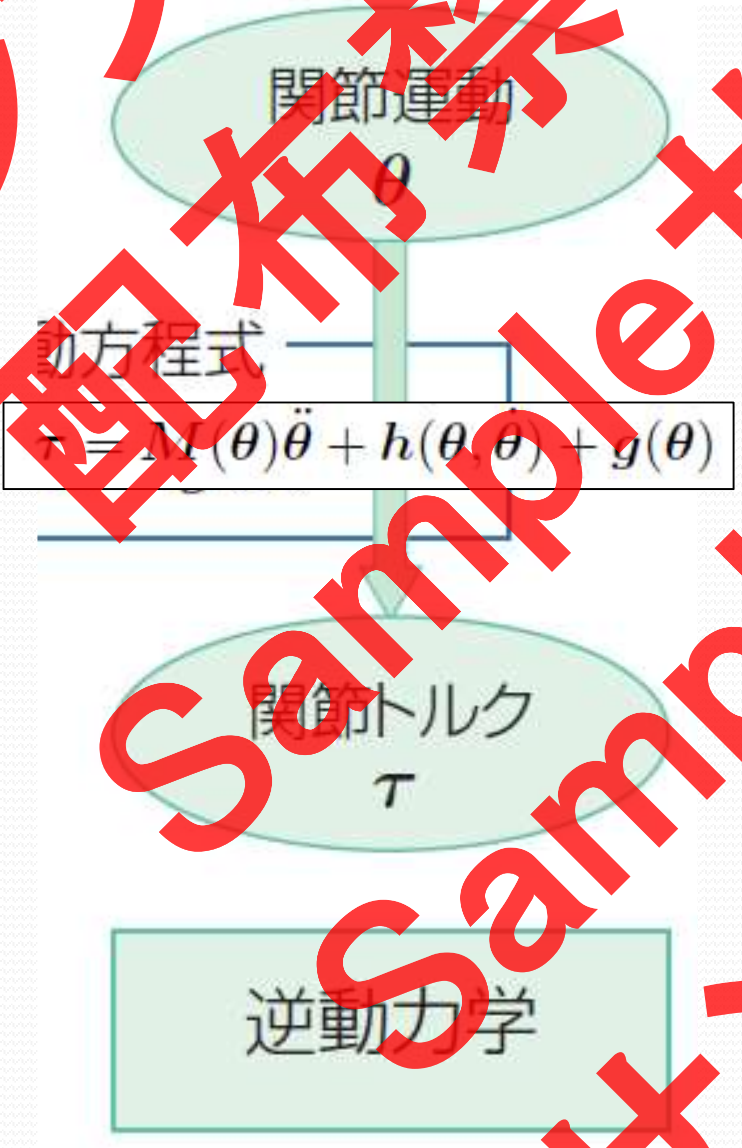


$$\tau = M(\theta)\ddot{\theta} + h(\theta, \dot{\theta}) + g(\theta)$$

13.2.2 順動力学

- 順動力学は「制御トルクを入力した際に，実際にマニピュレータがどのような動きをするのか」を知るときに用いる.
- この計算では，運動方程式を微分方程式として解き，その解を求め，結果的に生じる関節運動を知ることができる.
- 通常はコンピュータプログラムで数値的に解く方法（ルンゲクッタギル法，MATLABなど）を用いる.

13.2.3 逆動力学



- 順動力学とは逆に，目標の関節角度の運動が与えられており，その運動の実現に必要な関節トルクを知りたい場合がある．この計算が逆動力学である．
- 逆動力学の計算では，目標の関節角度の変位，速度，加速度を式に代入することで，関節トルクを計算できる．

Contents

- 13.1 2リンク2関節マニピュレータの運動方程式
- 13.2 順運動学と逆運動学
- 13.3 計算トルク法による軌道制御

13.3.1 並進1自由度システムの例

- 質点1自由度の運動方程式を考える．質量の値mは正確に与えられているとする．このとき，運動方程式は次式となり，運動xは運動方程式に支配される．

$$f = m\ddot{x}$$

- 目標運動 $x_d(t)$ が与えられた時，運動方程式によりそのときの目標力 f_d を計算し，その力を物体に与えることで，目標運動を完全に実現できる．

$$f_d = m\ddot{x}_d(t)$$

- 例えば目標軌道が次式で与えたとき，

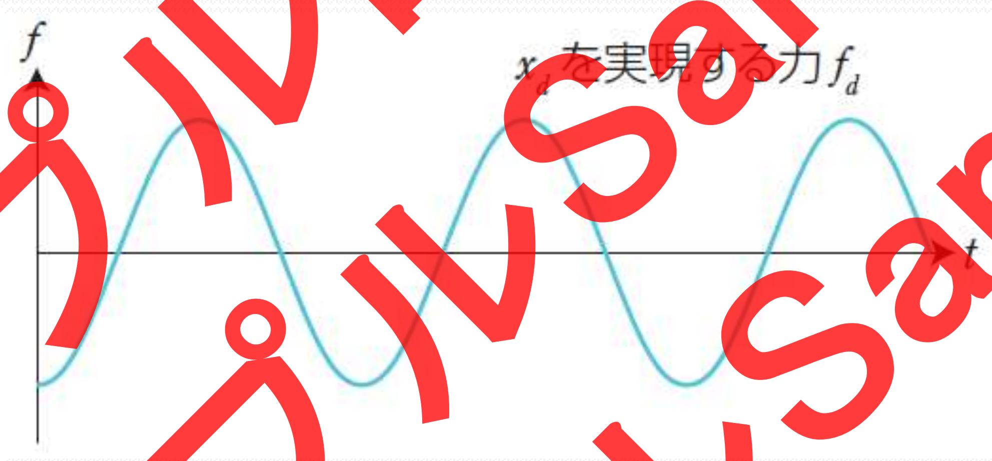
$$x_d(t) = a\cos\omega t$$

- 上式より，目標の加速度を得る．

$$\ddot{x}_d(t) = -a\omega^2\cos\omega t$$

- 運動方程式によりそのときの力を計算し，その力を物体に与えることで，目標運動を完全に実現できる．

$$f_d = m\ddot{x}_d(t)$$



13.3.2 マニピュレータにおける計算トルク法

- これまでの質点の運動制御の方法をマニピュレータの関節トルクに応用する.
- マニピュレータの運動方程式，および物理パラメタの値は正確にわかっているものとする.
- 逆動力学などから目標の関節運動 $\theta_d(t)$ が分かっていたとする. さらに目標の関節角速度 $\dot{\theta}_d$，角加速度 $\ddot{\theta}_d$ が分かっていたとする.
- これらの関節運動の時間データを以下の式に代入することでこの運動を実現する関節トルク τ_d を知ることができる.

$$\tau_d = M(\theta_d)\ddot{\theta}_d + h(\theta_d, \dot{\theta}_d)\dot{\theta}_d + g(\theta_d)$$

- 得られた目標関節トルク τ_d をアクチュエータによって実現すれば，目標の関節運動 $\theta_d(t)$ を完全に実現できる．
- このような，逆動力学に基づく軌道制御法を**計算トルク法**と呼ぶ．
- 計算トルク法の場合では，理論上完全に目標軌道に追従することができる．ただし，各物理パラメータの値を正確に知っておく必要がある．
- 実際には，ダイナミクスのモデル化誤差や物理パラメータが正確に分からない場合には，PD制御と組み合わせたり，適応制御などの手法を導入することで，精度が向上する（適応制御については説明は名前の紹介のみにとどめる）．

13.3.3 アクチュエータの運動方程式

- より精度の高い計算トルク法を行うには，マニピュレータの運動方程式だけでなく，使用するアクチュエータのもつ力学的特性，つまり運動方程式をも考慮しなければならない．

章末問題

1. 式 (13.1)～(13.7) を用いて式 (13.8) の導出を実際に自分で計算して，確かめよ．
2. 順動力学と逆動力学の違いを，式 (13.8) のマニピュレータの運動方程式を用いて説明せよ．

第13章のまとめ

まとめ

- ラグランジュ法を用いることで，マニピュレータの運動方程式を導出できる．
- 動力学には，順動力学と逆動力学の 2 つの種類が存在する．
- 計算トルク法では，逆動力学を用いて軌道制御を実現する．